第一章　微分流形

§1　张量代数

设 V 是域 F 上的一个 n 维**向量空间**，V 中的元素称为**向量**，F 中的元素称为**数**. 定义在 V 上的取值于 F 的函数

$$f: V \to F$$

称为**线性的**，如果

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \tag{1.1.1}$$

对任意的 $x, y \in V$ 和任意的 $\lambda, \mu \in F$ 成立. 若在 V 中任意取定一组基 $e_1, \cdots, e_n$，则 V 中的任意一向量 x 可以表示为

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i. \tag{1.1.2}$$

$x^i (i = 1, \cdots, n)$ 称为 x 对这组基的坐标. 以下常采用 Einstein 的和式约定：如无特别声明，在一个单项式中，凡重复的上、下指标，均表示该式关于这个指标在它的取值范围内求和，略去和式号. 例如，(1.1.2)可写成

$$x = x^i e_i. \tag{1.1.2$'$}$$

由(1.1.1)，线性函数 f 在 x 的值为

$$f(x) = f(x^i e_i) = x^i f(e_i).$$

可见，一个线性函数由它在给定的任意一组基上的值确定.

将定义在 V 上的取值于 F 的全体线性函数的集合记作 V^*，并在 V^* 中规定线性运算. 对任意的 $f, g \in V^*$，$x \in V$，$\lambda, \mu \in F$，定义 f 与 g 的和，λ 与 f 的乘积如下：

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

显然，$f + g$ 和 λf 仍然是线性函数，因而也都是 V^* 中的元素. 不

难验证，V^* 对上述加法和数乘运算也构成一个向量空间，称为向量空间 V 的**对偶空间**. V^* 中的元素，即 V 上的线性函数，又常称为**余向量或一次形式**.

设 $e_i(i=1,\cdots,n)$ 是向量空间 V 的一组基，$e^1,\cdots,e^n$ 是 V^* 中的元素，规定它们在上述给定的基上的值为

$$e^i(e_j) = \delta^i_j, \qquad i,j = 1,\cdots,n,$$

其中

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j, \end{cases} \qquad i,j = 1,\cdots,n.$$

这样就得到了由 V 中的这组基 $e_i(i=1,\cdots,n)$ 完全确定的 V^* 中的 n 个元素 $e^i(i=1,\cdots,n)$.

定理 1.1.1 $e^1,\cdots,e^n$ 是 V^* 的一组基.

证明 先证明 $e^i(i=1,\cdots,n)$ 是线性无关的. 若有 $a_1,\cdots,a_n\in F$，使

$$a_ie^i = 0,$$

则对任意的 $x\in V$，均有

$$a_ie^i(x) = 0.$$

特别，对所有的 $e_j(j=1,\cdots,n)$，

$$a_ie^i(e_j) = 0,$$

而

$$a_ie^i(e_j) = a_i\delta^i_j = a_j.$$

即 $a_j=0, j=1,\cdots,n$，所以，$e^1,\cdots,e^n$ 是线性无关的.

其次，设 f 是 V^* 中的任意的一个元素，

$$f(e_j) = f_j, \qquad j = 1,\cdots,n.$$

于是

$$(f_ie^i)(e_j) = f_ie^i(e_j) = f_i\delta^i_j = f_j,$$

即 f 与 f_ie^i 在所有基向量的值相等，所以

$$f = f_ie^i,$$

即 f 可以表示为 $e^i(i=1,\cdots,n)$ 的线性组合. 定理证毕.

这样由 V 中给定的一组基 $e_i(i=1,\cdots,n)$ 所确定的 V^* 中的一组基 $e^i(i=1,\cdots,n)$ 称为 V^* 中的关于 V 中的基 $e_i(i=1,\cdots,n)$ 的**对偶基**.

设 $x\in V$, x^i 是 x 对基 $e_i(i=1,\cdots,n)$ 的坐标,即 $x=x^ie_i$,则

$$e^j(x)=e^j(x^ie_i)=x^ie^j(e_i)=x^i\delta_i^j=x^j.$$

进一步地,设 $f\in V^*$, f_i 是 f 对基 $e^i(i=1,\cdots,n)$ 的坐标,即 $f=f_je^j$,则

$$f(x)=f_je^j(x^ie_i)=f_jx^ie^j(e_i)=f_jx^i\delta_i^j=f_ix^i. \tag{1.1.3}$$

设 V 和 W 分别为 n 和 m 维的向量空间,

$$f:\quad V\to W$$

为一线性映射,现定义 W 的对偶空间 W^* 到 V 的对偶空间 V^* 的一个映射

$$f^*:\quad W^*\to V^*.$$

$$(f^*w^*)(v)=w^*(f(v)),\qquad w^*\in W^*, v\in V.$$

容易证明, f^*w^* 是 V 上的线性函数,即 $f^*w^*\in W^*$,又因为

$$f^*(\lambda w^*)(v)=\lambda w^*(f(v))=\lambda(f^*w^*)(v),$$

$$\begin{aligned}f^*(w_1^*+w_2^*)(v)&=(w_1^*+w_2^*)(f(v))\\&=w_1^*(f(v))+w_2^*(f(v))\\&=(f^*w_1^*)(v)+(f^*w_2^*)(v),\end{aligned}$$

对任意的 $w^*, w_1^*, w_2^*\in W^*$, $v\in V$ 和 $\lambda\in F$ 成立.所以, f^* 为 W^* 到 V^* 的一个线性映射,并称之为 f 的**对偶映射**.

自然会进一步考虑 V^* 的对偶空间 $(V^*)^*$.设 φ 是 V^* 上的一个线性函数,它在 V^* 的基 $e^i(i=1,\cdots,n)$ 的值

$$\varphi^i=\varphi(e^i),\qquad i=1,\cdots,n.$$

$f=f_ie^i$ 是 V^* 的任一元素,于是

$$\varphi(f)=f_i\varphi^i.$$

命 $x=\varphi^ie_i\in V$,则有

$$f(x)=f_i\varphi^i,$$

所以

$$f(x)=\varphi(f)$$

对 V^* 中的任意元素 f 成立.这就得到了 V^* 上的线性函数 φ 与 V 中间的向量 x 之间的一个一一对应关系.也就是说,按 $\varphi(f)=f(x)$,V 中的任意元素 x 都可以看作是 V^* 上的一个线性函数 φ;反之,V^* 上的一个线性函数 φ 也可以看作 V 中的向量 x.因此,按照这样的对应关系,V^* 的对偶空间就是 V,并且,$e^i(i=1,\cdots,n)$的对偶基就是 $e_i(i=1,\cdots,n)$.总之,对偶关系是相互的.由于这个相互关系,我们可以定义 V 中元素 V 与 V^* 中元素 v^* 之间的配合:

$$\langle v,v^*\rangle=v^*(v).$$

它是 $V\times V^*$ 上的一个双线性函数.

特别,若 V 是欧氏向量空间,R 为实数域,y 为 V 中的任一元素,命

$$y:\quad x\to x\cdot y,\qquad x\in V,$$

其中 $x\cdot y$ 表示 x 与 y 的内积,这样就得到定义在 V 上的一个线性函数

$$y:\quad V\to R.$$

显然,这是一个线性函数,所以,V 中的任一元素都可以看作为 V 上的一个线性函数,即 V^* 中的一个元素.反之,通过上述内积,V 上的任一线性函数也可以看作为 V 中的一个元素.这就把 V 和 V^* 等同起来,也就是说,欧氏向量空间 V 的对偶空间就是 V,并且,若 $e_i(i=1,\cdots,n)$是 V 的一组标准正交基,即

$$e_i\cdot e_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j,\\ 0, & \text{当 } i\neq j.\end{cases}$$

则其对偶基 $e^i=e_i(i=1,\cdots,n)$,(1.1.3)就化为通常的内积在标准基中的坐标表示:

$$f(x)=f\cdot x=\sum_{i=1}^{n}f_ix_i,$$

其中 f_i 和 x_i 分别为 f 和 x 在标准基 $e_i(i=1,\cdots,n)$的坐标.

设 V 和 W 分别为域 F 上的 n 和 m 维的向量空间,$V\times W$ 是

它们的笛卡儿积,定义在 $V\times W$ 上的函数

$$f: V\times W\to F$$

称为**双线性的**,如果它对每一个变元都是线性的,即

$$f(\lambda v_1+\mu v_2,w)=\lambda f(v_1,w)+\mu f(v_2,w),$$

$$f(v,\lambda w_1+\mu w_2)=\lambda f(v,w_1)+\mu f(v,w_2)$$

对任意的 $v,v_1,v_2\in V,w,w_1,w_2\in W$ 和任意的 $\lambda,\mu\in F$ 成立.

将上述全体双线性函数的集合记作 $L(V,W,F)$,自然可按通常的函数加法和数乘函数规定其中的线性运算,且不难证明,$L(V,W;F)$ 对此线性运算构成一个向量空间,设 $a_i(i=1,\cdots,n)$ 和 $b_\alpha(\alpha=1,\cdots,m)$ 分别为 V 和 W 的基,$v=v^ia_i$ 和 $w=w^\alpha b_\alpha$ 分别为 V 和 W 中的任意元素,则

$$f(v,\omega)=f(a_i,b_\alpha)v^iw^\alpha.$$

因此,f 由它在基 $(a_i,b_\alpha)(i=1,\cdots,n;\alpha=1,\cdots,m)$ 上的值 $f(a_i,b_\alpha)$ 完全确定,并且,这 $n\times m$ 个数 $f(a_i,b_\alpha)$ 可以取任意的值.所以,$L(V,W;F)$ 是 $n\times m$ 维的向量空间.

设 $v^*\in V^*,w^*\in W^*$,现定义 $v^*\otimes w^*$ 作为 $V\times W$ 上的函数:

$$v^*\otimes w^*(v,w)=v^*(v)w^*(w),v\in V,w\in W,$$

并称为 v^* 与 w^* 的**张量积**.显然,作为映射

$$v^*\otimes w^*: V\times W\to F,$$

它是双线性的,即 $v^*\otimes w^*\in L(V,W;F)$.

将由全体 $v^*\otimes w^*$ 生成的空间记作 $V^*\otimes W^*$,称为 V^* 和 W^* 的张量积空间.显然,它是 $L(V,W;F)$ 的子空间.

设 a^i 和 $b^\alpha(i=1,\cdots,n;\alpha=1,\cdots,m)$ 分别为 V^* 和 W^* 关于 V 和 W 的基 a_i 和 b_α 的对偶基,不难证明,作为 $V^*\otimes W^*$ 的元素 $a^i\otimes b^\alpha$,它们是线性无关的,因此,$V^*\otimes W^*$ 是 nm 维的向量空间,即有

$$V^*\otimes W^*=L(V,W;F).$$

因为 V 和 W 又分别为 V^* 和 W^* 的对偶空间,故又可以定义

张量积 $V\otimes W$,并且

$$V\otimes W=L(V^*,W^*;F).$$

张量积 $V\otimes W$ 和 $V^*\otimes W^*$ 是互为对偶的,只须定义

$$\begin{aligned}\langle v\otimes w,v^*\otimes w^*\rangle&=v^*\otimes w^*(v\otimes w)\\&=v^*(v)w^*(w)=\langle v,v^*\rangle\langle w,w^*\rangle.\end{aligned}$$

特别

$$\langle a_i\otimes b_\alpha,a_j\otimes b^\beta\rangle=\delta_i^j\delta_\alpha^\beta=\begin{cases}1, & 当(i,\alpha)=(j,\beta),\\0, & 当(i,\alpha)\neq(j,\beta).\end{cases}$$

所以,$a_i\otimes b_\alpha$ 和 $a^i\otimes b^\alpha$ $(i=1,\cdots,n,\alpha=1,\cdots,m)$ 互为对偶基,并且

$$V^*\otimes W^*=(V\otimes W)^*.$$

进一步地,可以定义任意有限个向量空间的张量积,前面所定义的双线性函数的概念也可以推广到多变量,即**多线性函数**,不难证明,在它们之间也存在如上所述的关系.

常用的是一种特殊的多线性函数,即通常所谓的张量.

定义1.1.1 $r+s$ 线性函数

$$x:\overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{r次}\times\overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{s次}\to F$$

称为向量空间 V 上的一个 (r,s) 阶张量,或 r 阶逆变,s 阶协变的**混合张量**.

特别,$(0,s)$ 阶张量称为 s **阶协变张量**,$(r,0)$ 阶张量称为 r **阶逆变张量**,一阶逆变张量就是 V 中的向量,一阶协变张量就是 V^* 中的余向量,通常又将 F 中的数称为 $(0,0)$ 阶或零阶张量.

设 $T^{r,s}(V)(r,s\geqslant 0)$ 是 V 上的全体 (r,s) 阶张量所构成的向量空间,如前所述,它就是张量积空间

$$\overbrace{V\otimes\cdots\otimes V}^{r次}\otimes\overbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}^{s次},$$

这是一个 n^{r+s} 维的向量空间,特别

$$T^{(0,0)}(V)=F,$$

$$T^{(1,0)}(V)=V,$$

$$T^{(0,1)}(V)=V^*.$$

若 $e_i(i=1,\cdots,n)$是 V 的一组基,$e^i(i=1,\cdots,n)$是它在 V^* 中的对偶基,则由它们构成的 n^{r+s}个(r,s)阶张量

$$e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes e^{j_2}\otimes\cdots\otimes e^{j_s}$$

$(i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s=1,\cdots,n)$构成 $T^{r,s}(V)$的一组基.于是,任意一个(r,s)阶张量 t 都可以惟一地表示为

$$t=t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s},$$

且

$$\left(t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\right)$$

称为张量 t 对给定的基$e_i(i=1,\cdots,n)$的坐标.显然,

$$t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=t(e^{i_1},\cdots,e^{i_r},e_{j_1},\cdots,e_{j_s}),$$

由于一个张量由它在给定的一组基上的值惟一确定,所以,张量就由它对给定的基的坐标所刻画,两个张量相等必须且只须它们对任意给定的一组基的坐标相等.

现在考虑向量空间 V 上的全体张量的集合

$$T(V)=\sum_{r,s\geqslant 0}T^{r,s}(V),$$

式中的和号表示向量空间的弱直和.显然,对所规定的线性运算,$T(V)$构成一线性空间.进一步还可以在 $T(V)$中规定任意两个张量的乘积,设 a 和b 分别为(r,s)阶和(r_1,s_1)阶张量,a 和 b 的乘积定义为一个$(r+r_1,s+s_1)$阶张量,并记作 $a\otimes b$,

$$\begin{aligned}&a\otimes b(v^1,\cdots,v^{r+r_1},v_1,\cdots,v_{s+s_1})\\&=a(v^1,\cdots,v^r,v_1,\cdots,v_s)b(v^{r+1},\cdots,v^{r+r_1},v_{s+1},\cdots,v_{s+s_1}),\\&\quad v_1,\cdots,v_{s+s_1}\in V,v^1,\cdots,v^{r+r_1}\in V^*.\end{aligned}$$

且容易验证,下列运算规律

$$(a\otimes b)\otimes c=a\otimes(b\otimes c),$$
$$(\lambda a)\otimes b=\lambda(a\otimes b),$$

$$(a+b)\otimes c = a\otimes c + b\otimes c,$$

对任意的 $a,b,c\in T(V)$和 $\lambda\in F$ 成立.

$T(V)$连同在它上面所定义的线性运算和乘积运算称为向量空间 V 上的一个**张量代数**.

对 V 中任意给定的一组基 $e_i(i=1,\cdots,n)$,上述张量运算都可以表示为坐标的运算,设 a 和 b 分别为(r,s)和(r_1,s_1)阶张量,其坐标分别为$\left(a^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\right)$和$\left(b^{i_1\cdots i_{r_1}}_{j_1\cdots j_{s_1}}\right)$,则$(r+r_1,s+s_1)$阶张量 $a\otimes b$ 的坐标为

$$\left((a\otimes b)^{i_1\cdots i_r i_{r+1}\cdots i_{r+r_1}}_{j_1\cdots j_s j_{s+1}\cdots j_{s+s_1}}\right) = \left(a^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} b^{i_{r+1}\cdots i_{r+r_1}}_{j_{s+1}\cdots j_{s+s_1}}\right).$$

$\lambda a(\lambda\in F)$仍然是一个(r,s)阶张量,其坐标为

$$\left((\lambda a)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\right) = \left(\lambda a^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\right).$$

若 a 和 b 为同阶张量,即$(r,s)=(r_1,s_1)$,则 $a+b$ 仍然是一个(r,s)阶张量,其坐标为

$$(a+b)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} = \left(a^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} + b^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\right).$$

利用坐标表示张量及其运算显得自然面又方便,但是,由于坐标是依赖于向量空间 V 中的基的选取的.所以,我们必须考虑坐标变换.

设 $e_{i'}(i'=1,\cdots,n)$是 V 的另一组基,$e^{i'}(i'=1,\cdots,n)$是它在 V^* 中的对偶基,且

$$e_i = c^{i'}_i e_{i'},\qquad i=1,\cdots,n. \tag{1.1.4}$$

显然,$(c^{i'}_i)$是一个非奇矩阵,又设

$$e^j = c^j_{j'} e^{j'},\qquad j=1,\cdots,n. \tag{1.1.5}$$

由于

$$\begin{aligned}\delta^j_i = e^j(e_i) &= c^j_{j'} c^{i'}_i e^{j'}(e_{i'})\\ &= c^j_{j'} c^{i'}_i \delta^{j'}_{i'} = c^j_{i'} c^{i'}_i,\qquad i,j=1,\cdots,n,\end{aligned}$$

所以，$(c_{i'}^{i})$是$(c_i^{i'})$的逆矩阵，并有

$$e_{i'} = c_{i'}^{i} e_i, \quad e^{i'} = c_i^{i'} e^i, \quad i, i' = 1, \cdots, n. \tag{1.1.6}$$

设张量 a 对基$e_{i'}(i=1,\cdots,n)$的坐标为$\left(a_{j_{1'}\cdots j_{s'}}^{i_{1'}\cdots i_{r'}}\right)$，即

$$a_{j_{1'}\cdots j_{s'}}^{i_{1'}\cdots i_{r'}} = a(e^{i_{1'}}, \cdots, e^{i_{r'}}, e_{j_{1'}}, \cdots, e_{j_{s'}}). \tag{1.1.7}$$

将(1.1.6)代入(1.1.7)的右端，则得到

$$a(e^{i_{1'}}, \cdots, e^{i_{r'}}, e_{j_{1'}}, \cdots, e_{j_{s'}})$$

$$= c_{i_1}^{i_{1'}} \cdots c_{i_r}^{i_{r'}} c_{j_{1'}}^{j_1} \cdots c_{j_{s'}}^{j_s} a(e^{i_1}, \cdots, e^{i_r}, e_{j_1}, \cdots, e_{j_s}),$$

即

$$a_{j_{1'}\cdots j_{s'}}^{i_{1'}\cdots i_{r'}} = c_{i_1}^{i_{1'}} \cdots c_{i_r}^{i_{r'}} c_{j_{1'}}^{j_1} \cdots c_{j_{s'}}^{j_s} a_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}, \tag{1.1.8}$$

反之

$$a_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r} = c_{i_{1'}}^{i_1} \cdots c_{i_{r'}}^{i_r} c_{j_1}^{j_{1'}} \cdots c_{j_s}^{j_{s'}} a_{j_{1'}\cdots j_{s'}}^{i_{1'}\cdots i_{r'}}. \tag{1.1.9}$$

这就是张量的坐标应满足的变换规律．张量 a 就由这些满足坐标变换的坐标所刻画．因此，一个(r,s)阶张量也可以定义为，对 V 中任意给定的一组基$e_i(i=1,\cdots,n)$，它对应 n^{r+s}个数

$$\left(a_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\right)$$

且满足坐标变换规律(1.1.8)或(1.1.9)．

§2 外 代 数

在本节中讨论一类特殊的张量．

定义 1.2.1 一个 p 阶协变(或逆变)张量 a 称为对称的，如果自变量经任意的排列，张量 a 的值不变，即对任意的 $x_1,\cdots,x_p\in V$(或 V^*)，

$$a(x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}) = a(x_1, \cdots, x_p), \tag{1.2.1}$$

其中$(i_1,\cdots,i_p)$是$(1,\cdots,p)$的一个任意的排列.

定义 1.2.2 一个 p 阶协变(或逆变)张量 a 称为**反称的**,如果自变量经任意的偶排列,张量 a 的值不变,而自变量经任意的奇排列,张量 a 的值反号,即对任意的 $x_1,\cdots,x_p\in V$(或 V^*),

$$a(x_{i_1},\cdots,x_{i_p})=\sigma(i_1\cdots i_p)a(x_1,\cdots,x_p),\qquad(1.2.2)$$

其中$(i_1,\cdots,i_p)$是$(1,\cdots,p)$的一个任意的排列,$\sigma(i_1,\cdots,i_p)$是这个排列的符号,即

$$\sigma(i_1\cdots i_p)=\begin{cases}1, & 当(i_1,\cdots,i_p)\ 是(1,\cdots,p)\ 的偶排列,\\ -1, & 当(i_1,\cdots,i_p)\ 是(1,\cdots,p)\ 的奇排列.\end{cases}$$

根据排列与对换的关系,一个 p 阶协变(或逆变)张量 a 是对称的,必须且只须它对 V 中某一组基的坐标关于任意两个指标都是对称的;a 是反称的,必须且只须它的坐标关于任意两个指标都是反称的.

设 a 任意给定的 p 阶协变(或逆变)张量,则可以由它惟一确定一个 p 阶协变(或逆变)张量(a):

$$(a)(x_1,\cdots,x_p)=\frac{1}{p!}\sum_{(i_1,\cdots,i_p)}a(x_{i_1},\cdots,x_{i_p}),\qquad(1.2.3)$$

其中 $x_1,\cdots,x_p$ 是 V(或 V^*)中的任意元素,$(i_1,\cdots,i_p)$是$(1,\cdots,p)$任意排列,式中和号表示对$(1,\cdots,p)$的所有排列求和.显然,对自变量的任意排列,(a)的值不变,所以(a)是对称张量,并称为张量 a 的**对称化**.容易证明,张量 a 是对称的必须且只须

$$(a)=a.$$

a 也可以惟一确定一个 p 阶协变(或逆变)的反称张量$[a]$:

$$[a](x_1,\cdots,x_p)=\frac{1}{p!}\sum_{(i_1,\cdots,i_p)}\sigma(i_1,\cdots,i_p)a(x_{i_1},\cdots,x_{i_p}),\qquad(1.2.4)$$

并称之为张量 a 的**反称化**.显然,张量 a 是反称的必须且只须

$$[a]=a.$$

设 $e_i(i=1,\cdots,n)$是 V 中任意给定的一组基,a 是一个 p 阶

协变张量,它对这组给定基的坐标为

$$(a_{i_1\cdots i_p}).$$

因为 $a_{i_1\cdots i_p}=a(e_{i_1},\cdots,e_{i_p})$,由(1.2.3),$a$ 的对称化(a)的坐标为

$$(a)_{i_1\cdots i_p} = \frac{1}{p!}\sum_{(i_1,\cdots,i_p)} a_{j_1\cdots j_p}, \tag{1.2.5}$$

式中$(j_1,\cdots,j_p)$是$(i_1,\cdots,i_p)$的任意排列,和号表示对所有的排列求和.通常也将$(a)_{i_1\cdots i_p}$记作$a_{(i_1\cdots i_p)}$.

又由(1.2.4),a 的反称化$[a]$的坐标为

$$[a]_{i_1\cdots i_p} = \frac{1}{p!}\delta^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_p}a_{j_1\cdots j_p}, \tag{1.2.6}$$

其中

$$\delta^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_p}=\begin{cases}1, & \text{若 } i_1,\cdots,i_p \text{ 各不相同,}\\ & \text{且}(j_1,\cdots,j_p)\text{ 是}(i_1,\cdots,i_p)\text{ 的偶排列,}\\ -1, & \text{若 } i_1,\cdots,i_p \text{ 各不相同,}\\ & \text{且}(j_1,\cdots,j_p)\text{ 是}(i_1,\cdots,i_p)\text{ 的奇排列,}\\ 0, & \text{其他情形.}\end{cases}$$

通常也将$[a]_{i_1\cdots i_p}$记作$a_{[i_1\cdots i_p]}$.

定义 1.2.3 域 F 上的n 维向量空间 V 上的一个 $p(\geqslant 2)$阶反称协变张量称为一个 p **次外形式**,协变向量即余向量又称为**一次外形式或一次形式**,F 中的数又称为**零次外形式或零次形式**.

假设域 F 的特征数不等于 2.

若 $p>n$,p 次外形式α 对 V 中任意一组基$e_i(i=1,\cdots,n)$的坐标为

$$\alpha_{i_1\cdots i_p} = \alpha(e_{i_1},\cdots,e_{i_p}),\quad i_1,\cdots,i_p = 1,\cdots,n.$$

因此,$e_{i_1},\cdots,e_{i_p}$中至少有两个是重复的,由 α 的反称性,

$$\alpha_{i_1\cdots i_p} = 0,\quad i_1,\cdots,i_p = 1,\cdots,n.$$

所以,高于 n 次的外形式只有零.

设 $F_p(V)$是 V 上的全体 p 次外形式的集合,显然

$$F_0(V) = F,\qquad F_1(V) = V^*.$$

因为任意两个 p 次外形的和仍是 p 次外形式,任意一个数与任意一个 p 次外形式的乘积仍是 p 次外形式,所以,$F_p(V)$ 是 $T^{0,p}(V)$ 的一个向量子空间.作为张量,任意两个外形式自然可以作张量乘积,问题是得到的乘积一般不只是外形式,我们需要在外形式之间定义一种特殊的乘积,即所谓外积.

定义 1.2.4 一个 p 次外形式 α 与一个 q 次外式 β 的张量积 $\alpha\otimes\beta$ 的反称化 $[\alpha\otimes\beta]$ 称为 α 与 β 的**外积**,记作 $\alpha\wedge\beta$.

显然,$\alpha\wedge\beta$ 是一个 $p+q$ 次外形式.

设 $x_1,\cdots,x_p,x_{p+1},\cdots,x_{p+q}$ 是 V 中的任意元素,由外积的定义

$$
\begin{aligned}
&\alpha\wedge\beta(x_1,\cdots,x_p,x_{p+1},\cdots,x_{p+q})\\
=&[\alpha\otimes\beta](x_1,\cdots,x_p,x_{p+1},\cdots,x_{p+q})\\
=&\frac{1}{(p+q)!}\delta^{i_1\cdots i_p i_{p+1}\cdots i_{p+q}}_{1\cdots p\, p+1\cdots p+q}\alpha(x_{i_1},\cdots,x_{i_p})\beta(x_{i_{p+1}},\cdots,x_{i_{p+q}}),
\end{aligned}
$$

或者用坐标表示为

$$
\begin{aligned}
&(\alpha\wedge\beta)_{i_1\cdots i_p i_{p+1}\cdots i_{p+q}}\\
=&\frac{1}{(p+q)!}\delta^{j_1\cdots j_p j_{p+1}\cdots j_{p+q}}_{i_1\cdots i_p i_{p+1}\cdots i_{p+q}}a_{j_1}\cdots a_{j_p}a_{j_{p+1}}\cdots a_{j_{p+q}}.
\end{aligned}
$$

定理 1.2.1 外积适合下列运算规律.

1. 结合律.对任意的外形式 α,β 和 γ,

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma).$$

2. 分配律.若 α 和 α_2 是同次的外形式,

$$(\alpha_1+\alpha_2)\wedge\beta=\alpha_1\wedge\beta+\alpha_2\wedge\beta.$$

3. 反交换律.若 α 是 p 次外形式,β 是 q 次外形式,

$$\alpha\wedge\beta=(-1)^{pq}\beta\wedge\alpha.$$

证明 性质 2 是显然的,以下证明性质 1 和 3.

1. 设 α,β 和 γ 分别为 p,q 和 r 次的外形式,$x_1,\cdots,x_p,x_{p+1},\cdots,x_{p+q},x_{p+q+1},\cdots,x_{p+1+r}$ 是 V 中的任意元素,由外积的定义,

$$
\begin{aligned}
&(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma(x_1, \cdots, x_{p+q+1}) \\
&= \frac{1}{(p+q+r)!} \delta^{i_1 \cdots i_{p+q+r}}_{1 \cdots p+q+r} \\
&\quad \cdot (\alpha \wedge \beta)(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{p+q}}) \gamma(x_{i_{p+q+1}}, \cdots, x_{i_{p+q+r}}) \\
&= \frac{1}{(p+q+r)!} \delta^{i_1 \cdots i_{p+q+r}}_{1 \cdots p+q+r} \frac{1}{(p+q)!} \delta^{j_1 \cdots j_{p+q}}_{i_1 \cdots i_{p+q}} \alpha(x_{j_1}, \cdots, x_{j_p}) \\
&\quad \cdot \beta(x_{j_{p+1}}, \cdots, x_{j_{p+q}}) \gamma(x_{i_{p+q+1}}, \cdots, x_{i_{p+q+1}}) \\
&= \frac{1}{(p+q+r)!} \delta^{i_1 \cdots i_{p+q+r}}_{1 \cdots p+q+r} \alpha(x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}) \\
&\quad \cdot \beta(x_{i_{p+1}}, \cdots, x_{i_{p+q}}) \gamma(x_{i_{p+q+1}}, \cdots, x_{i_{p+q+r}}) \\
&= \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)(x_1, \cdots, x_{p+q+r}),
\end{aligned}
$$

所以

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

3. 设 $x_1, \cdots, x_{p+q}$ 是 V 中的任意元素，由外积的定义，

$$
\begin{aligned}
&\alpha \wedge \beta(x_1, \cdots, x_{p+q}) \\
&= \frac{1}{(p+q)!} \delta^{i_1 \cdots i_{p+q}}_{1 \cdots p+q} \alpha(x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}) \beta(x_{i_{p+1}}, \cdots, x_{i_{p+q}}) \\
&= \frac{(-1)^{pq}}{(p+q)!} \delta^{i_{p+1} \cdots i_{p+q} i_1 \cdots i_p}_{1 \cdots p+q} \beta(x_{i_{p+1}}, \cdots, x_{i_{p+q}}) \alpha(x_{i_1}, \cdots x_{i_p}) \\
&= \frac{(-1)^{pq}}{(p+q)!} \delta^{i_1 \cdots i_q i_{q+1} \cdots i_{q+p}}_{1 \cdots q+p} \beta(x_{i_1}, \cdots, x_{i_q}) \alpha(x_{i_{q+1}}, \cdots, x_{i_{q+p}}) \\
&= (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha(x_1, \cdots, x_{p+q}),
\end{aligned}
$$

所以

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

特别，若 α 和 β 都是一次外形式，则

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha,$$

并由此得到

$$\alpha \wedge \alpha = 0.$$

设

$$F(V)=\sum_{p=0}^{n}F_p(V)$$

是向量空间 V 上的全体外形式集合，这样，在 $F(V)$ 上就定义了线性运算和外积运算，$F(V)$ 连同这些运算就称为向量空间 V 上的一个**外代数**，也称为 Grassmann 代数.

定理 1.2.2 设 $e_i(i=1,\cdots,n)$ 是向量空间 V 的一组基，$e^i(i=1,\cdots,n)$ 是它在 V^* 中的对偶基，则

$$e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_p},\quad 1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n$$

是 $F_p(V)$ 的一组基.

证明 首先证明 $e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_p}(1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n)$ 是线性无关的. 若有 $a_{i_1}\cdots i_p(1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n)$ 使

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}a_{i_1\cdots i_p}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_p}=0,$$

则对任意的 $1\leqslant j_1<\cdots<j_p\leqslant n$，均有

$$\begin{aligned}0&=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}a_{i_1\cdots i_p}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_p}(e_{j_1},\cdots,e_{j_p})\\&=\frac{1}{p!}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}a_{i_1\cdots i_p}\delta^{k_1\cdots k_p}_{j_1\cdots j_p}\delta^{i_1}_{k_1}\cdots\delta^{i_p}_{k_p}\\&=\frac{1}{p!}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}a_{i_1\cdots i_p}\delta^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p}\\&=\frac{1}{p!}a_{j_1\cdots j_p}.\end{aligned}$$

即所有的系数 $a_{j_1\cdots j_p}(1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n)$ 均为零，因此，$e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_p}(1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n)$ 是线性无关的.

其次，设 α 是任意给定一个 p 次外形式，且

$$\alpha(e_{j_1},\cdots,e_{j_p})=a_{j_1\cdots j_p},\quad j_1,\cdots,j_p=1,\cdots,n.\quad(1.2.7)$$

因为 α 是反称的，于是对任意的 $e_{j_1},\cdots,e_{j_p}$，

$$p!\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}a_{i_1\cdots i_p}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_p}(e_{j_1},\cdots,e_{j_p})=a_{j_1\cdots j_p},$$

所以

$$\alpha = p! \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} a_{i_1 \cdots i_p} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}. \qquad (1.2.8)$$

这就证明了 $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} (1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n)$ 是 $F_p(V)$ 的一组基. 因此, $F_p(V)$ 是 C_n^p 维的向量空间. 而外代数 $F(V)$ 的维数则为

$$1 + n + \cdots + C_n^p + \cdots + C_n^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n.$$

(1.2.8)又可表示为

$$\alpha = a_{i_1 \cdots i_p} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}. \qquad (1.2.9)$$

由(1.2.7), $a_{i_1 \cdots i_p}$ 关于它的指标是反称的. 有的时候, 采用表示形式(1.2.9)比(1.2.8)更方便. 但是采用(1.2.9)的形式时, 通常均假定其系数 $a_{i_1 \cdots i_p}$ 对于它的指标是反称的, 否则其表现形式不能惟一确定, 且不具有(1.2.7)所显示的性质.

设 $f: V \to W$ 是向量空间 V 到向量空间 W 的一个线性映射, $f^*: W^* \to V^*$ 是它所诱导的对偶映射, 可以自然地将 f^* 扩充为 $F_p(W)$ 到 $F_p(V)$ 的一个映射 $(p = 1, \cdots, n)$,

$$f^*: \quad F_p(W) \to F_p(V), \quad p = 1, \cdots, n,$$

它定义为

$$(f^* \alpha)(v_1, \cdots, v_p) = \alpha(f v_1, \cdots, f v_p),$$
$$\alpha \in F_p(W), v_1, \cdots, v_p \in V. \qquad (1.2.10)$$

从而有 W 上的外代数 $F(W)$ 到 V 上的外代数 $F(V)$ 的一个映射

$$f^*: \quad F(W) \to F(V).$$

容易证明, f^* 是线性的, 并且还可以进一步证明, f^* 与外积运算交换.

定理 1.2.3 设 $f: V \to W$ 是线性映射, 则 f^* 与外积运算交换, 即对任意的 $\alpha, \beta \in F(W)$,

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^* \alpha \wedge f^* \beta.$$

证明 设 α 和 β 分别为 p 和 q 次的, $v_1, \cdots, v_{p+q}$ 是 V 中任意的元素, 则由 f^* 和外积的定义,

$$f^*(\alpha \wedge \beta)(v_1,\cdots,v_{p+q}) = \alpha \wedge \beta(fv_1,\cdots,fv_{p+q})$$

$$= \frac{1}{(p+q)}\delta^{i_1\cdots i_p i_{p+1}\cdots i_{p+q}}_{1\cdots p p+1\cdots p+q}$$

$$\cdot \alpha(fv_{i_1},\cdots,fv_{i_p})\beta(fv_{i_{p+1}},\cdots,fv_{i_{p+q}})$$

$$= \frac{1}{(p+q)}\delta^{i_1\cdots i_p i_{p+1}\cdots i_{p+q}}_{1\cdots p p+1\cdots p+q}$$

$$\cdot f^*\alpha(v_{i_1},\cdots,v_{i_p})f^*\beta(v_{i_{p+1}},\cdots,v_{i_{p+q}})$$

$$= f^*\alpha \wedge f^*\beta(v_1,\cdots,v_{p+q}).$$

因此

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta,$$

所以，f^* 是外代数 $F(W)$ 到外代数 $F(V)$ 的一个同态.

以下讨论有关外形式和外积的一些进一步的性质.

设 $x^1,\cdots,x^p$ 是 V^* 中任意给定的一组线性无关的一形式，它可以扩充为 V^* 中的一组基

$$x^1,\cdots,x^p,x^{p+1},\cdots,x^n.$$

由定理 1.2.2，$x^{i_1}\wedge\cdots\wedge x^{i_p}(1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n)$ 为 $F_p(V)$ 中的一组基. 特别，

$$x^1 \wedge \cdots \wedge x^p \neq 0.$$

反之，若 $x^1,\cdots,x^p$ 是线性相关的，即其中必有一个可表示为其他的线性组合，则显然有

$$x^1 \wedge \cdots \wedge x^p = 0.$$

于是就得到下列定理.

定理 1.2.4 一次形式 $x^1,\cdots,x^p$ 是线性无关的充要条件是

$$x^1 \wedge \cdots \wedge x^p \neq 0.$$

由此可以进一步证明著名的 Cartan 引理.

定理 1.2.5(Cartan 引理) 设 $x^1,\cdots,x^p,\omega^1,\cdots,\omega^p$ 都是一形式，满足

$$\sum_{\lambda=1}^{p}\omega^\lambda \wedge x^\lambda = 0, \tag{1.2.11}$$

且 $x^1,\cdots,x^p$ 是线性无关的，则 $\omega^1,\cdots,\omega^p$ 可表示为 $x^1,\cdots,x^p$ 的

线性组合,即

$$\omega^\lambda = \sum_{\mu=1}^{p} a_{\lambda\mu} x^\mu, \quad \lambda = 1,\cdots,p,$$

且

$$a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}.$$

证明 由(1.2.11),即

$$\omega^1 \wedge x^1 + \cdots + \omega^p \wedge x^p = 0,$$

可得

$$\omega^\lambda \wedge x^1 \wedge \cdots \wedge x^p = 0, \quad \lambda = 1,\cdots,p.$$

由定理 1.2.4,$\omega^\lambda, x^1, \cdots, x^p$ 是线性相关的,而 $x^1, \cdots, x^p$ 是线性无关的,所以

$$\omega^\lambda = \sum_{\mu=1}^{p} a_{\lambda\mu} x^\mu, \quad \lambda = 1,\cdots,p. \tag{1.2.12}$$

将(1.2.12)代入(1.2.11),得到

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{p} a_{\lambda\mu} x^\mu \wedge x^\lambda = \sum_{0\leqslant\mu<\lambda\leqslant p} (a_{\lambda\mu} - a_{\mu\lambda}) x^\mu \wedge x^\lambda = 0.$$

又因为 $x^\mu \wedge x^\lambda (1\leqslant\mu<\lambda\leqslant p)$ 是线性无关的,所以

$$a_{\lambda\mu} - a_{\mu\lambda} = 0,$$

即

$$a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}.$$

定理证毕.

定理 1.2.4 还可以推广为较一般的结论.

定理 1.2.6 设 $\omega^1, \cdots, \omega^r$ 是 n 维向量空间 V 上的一次形式,且线性无关,φ 是一个 p 次外形式,则存在 $p-1$ 次外形式 $\varphi^1, \cdots, \varphi^r$ 使

$$\varphi = \omega^1 \wedge \varphi^1 + \cdots + \omega^r \wedge \varphi^r, \tag{1.2.13}$$

必须且只须

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^r \wedge \varphi = 0. \tag{1.2.14}$$

证明 必要性显然,现证充分性.

$\omega^1, \cdots, \omega^r$ 可以扩充为 V^* 上的一组基 $\omega^1, \cdots, \omega^r, \cdots, \omega^n$.

若 $p+r>n$，则 p 次外形式 φ 用这一基表示时，每项中必有 $\omega^\lambda(\lambda=1,\cdots,p)$，结论显然成立.

若 $p+r\leqslant n$，则必有

$$\varphi=\omega^1\wedge\varphi^1+\cdots+\omega^r\wedge\varphi^r+\sum_{p+1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\varphi_{i_1\cdots i_p}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_p},$$

其中 $\varphi^1,\cdots,\varphi^r$ 为 $p-1$ 次形式，将上述表示式代入(1.2.14)，则有

$$\sum_{r+1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\varphi_{i_1\cdots i_p}\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^r\wedge\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_p}=0,$$

所以

$$\varphi_{i_1\cdots i_p}=0,\quad r+1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n,$$

(1.2.13)成立. 定理证毕.

设 $e^1,\cdots,e^n$ 是 V^* 的一组基，$x^1,\cdots,x^p$ 是 V^* 中任意给定的 p 个元素，其坐标为(x_j^λ)，$\lambda=1,\cdots,p$，$j=1,\cdots,n$，即

$$x^\lambda=x_j^\lambda e^j,\quad \lambda=1,\cdots,p.$$

于是

$$x^1\wedge\cdots\wedge x^p=x_{j_1}^1\cdots x_{j_p}^p e^{j_1}\wedge\cdots\wedge e^{j_p}.$$

因为

$$\begin{aligned}e^{j_1}\wedge\cdots\wedge e^{j_p}&=\frac{1}{p!}\delta_{k_1\cdots k_p}^{j_1\cdots j_p}e^{k_1}\wedge\cdots\wedge e^{k_p}\\&=\sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_p\leqslant n}\delta_{k_1\cdots k_p}^{j_1\cdots j_p}e^{k_1}\wedge\cdots\wedge e^{k_p},\end{aligned}$$

所以

$$x^1\wedge\cdots\wedge x^p=\sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_p\leqslant n}\delta_{k_1\cdots k_p}^{j_1\cdots j_p}x_{j_1}^1\cdots x_{j_p}^p e^{k_1}\wedge\cdots\wedge e^{k_p},$$

由行列式的定义

$$x^1\wedge\cdots\wedge x^p=\sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_p\leqslant n}\begin{vmatrix}x_{k_1}^1&\cdots&x_{k_p}^1\\\vdots&&\vdots\\x_{k_1}^p&\cdots&x_{k_p}^p\end{vmatrix}e^{k_1}\wedge\cdots\wedge e^{k_p}.\tag{1.2.15}$$

特别，当 $p=n$ 时，则有

$$x^1 \wedge \cdots \wedge x^n = \begin{vmatrix} x_1^1 & \cdots & x_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} e^1 \wedge \cdots \wedge e^n. \tag{1.2.16}$$

可见，外积有明确的几何意义，它表示了行列式，即有向体积. 由以上关系也可以看出，外积也可以看作是通常欧氏空间的向量积和混合积这两种运算的统一和推广.

由(1.2.13)，$x^1 \wedge \cdots \wedge x^p = 0$ 必须且只须 $p \times n$ 阶矩阵(x_j^λ) $(\lambda=1,\cdots,p, j=1,\cdots,n)$的所有 p 阶子式

$$\begin{vmatrix} x_{k_1}^1 & \cdots & x_{k_p}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k_1}^p & \cdots & x_{k_p}^p \end{vmatrix} = 0, \quad 1 \leqslant k_1 < \cdots < k_p \leqslant n.$$

即矩阵(x_j^λ)的秩$<p$，也就是 $x^1,\cdots,x^p$ 是线性相关的. 由此也给出定理 1.2.4 的一个证明.

由于 V 与 V^* 的对偶关系是相互的，本节中有关外形式的外积讨论均适用于向量空间 V.

§3 微分流形的定义

微分流形是通常的曲面概念的抽象，这个所谓"抽象"，就是要脱离外围空间，考虑整体，并推广到高维，使其成为一般的可以对函数进行微分的空间.

在微分几何中，研究曲面时常采用"参数表示"，这个参数表示就是一块平面到一块曲面的同胚. 好像一张地图，用一块平面来表示地球上的一个区域. 但是，一般来说来，参数表示是局部的，而且也不是惟一的. 因此，必须考虑不同参数表示之间的关系，以及如何将用参数表示的一块块曲面粘合成一个整体的曲面.

平面是一个显然的偶子，只要用一张"地图"就可以表示它. 典

型的例子是球面，绝不能用一张"地图"表示整个球面，因为球面与平面不同胚．但是，我们可以用两张或几张"地图"来表示它．例如，

用球极投影可以建立球面上除了南极(或北极)以外的点与平面上的点之间的一一对应，这就是覆盖球面的两张"地图"．通过上述对应关系，就可以用平面上的点来表示球面上的点．若在平面上取定了一个坐标系，平面上的点又可以用坐标表示，因面也就可以进一步用坐标来表示球面上的点，这就是通常所谓的参数表示．这两个参数表示合起来就表示了整个的球面．问题是在这两个表示的公共部分即球面上除南极和北极以外的点，同一点就有了两个不同的参数(即坐标)．因此就必须考虑不同参数表示之间的关系，这就是所谓**参数变换**或**坐标变换**．如果参数变换关系是可微的，这就能保证球面上的用参数表示出来的点的函数的可微性与参数的选取无关．于是，整体的球面可以看成是由两个半球面粘合起来的，通过参数表示又可以看作是由两块平面粘合起来的，粘合的方法就是参数变换，变换可微即粘合光滑．一册世界地图中的各张地图可以看成是覆盖球面的一块块的分片表示，将各张地图按地名粘合起来就成为地球仪．因此，形象地说，微分流形就是一块块欧氏空间的粘合，且粘合是光滑的．

将上述思想用数学语言表达出来就得到微分流形的定义．

定义 1.3.1 局部同胚于欧氏空间 R^n 的拓扑空间 X 称为一个 n **维流形**．

这就是说，在 n 维流形上的每一点，都有一个同胚于 n 维欧氏空 R^n(或 R^n 的一个开集)的邻域．

从包含点 $x(\in X)$的一个开集 U 到R^n 的一个开集 V 上的同胚

$$\varphi:\quad U \to V = \varphi(U) \subset R^n,$$

称为 x 的一个 n **维坐标系**，U 称为**坐标域**，$(\varphi(U), \varphi^{-1})$称为**坐标卡**．

设 x 是 U 中的任意一点，$\varphi(x)(\in R^n)$称为 x 对坐标系 φ 的**坐标**．若在 R^n 中任意取定一个坐标系，则 x 又可以通过 $\varphi(x)$在

给定坐标系中的坐标$(\varphi(x)^i)(i=1,\cdots,n)$来表示,即可将它看作为点 x 的坐标,并记作$(x^i),i=1,\cdots,n$.

盖满 X 的一族 n 维坐标系$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}(\alpha\in I,I$ 为一指标集)称为 X 的一个 n **维坐标集或坐标覆盖**.由流形的定义,一个拓扑空间 X 是一个 n 维流形,必须且只须它有一个 n 维坐标集.

可以这样想,一张坐标卡 $V=\varphi(U)(\subset R^n)$是反映坐标域 U $(\subset X)$的一张"地图",画法就是 φ^{-1},V 上的一点 a 表示一个"地点"$\varphi^{-1}(a)\in U$,一个坐标集就是"世界"X 的一册"世界地图".

流形上的一个点可能属于坐标集中不同的坐标域.这样,同一点对不同的坐标系就有不同的坐标.这就需要考虑不同的坐标之间的关系,即**坐标变换**.具体说来,设

$$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\},\qquad \alpha\in I$$

是流形 X 的一个坐标集,若 $U_\alpha\cap U_\beta$ 非空,则 φ_α 和 φ_β 都是 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上的坐标系.因此,在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上对上述两个不同的坐标系就有两组不同的坐标.设

$$V_{\beta\alpha}=\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta),\quad V_{\alpha\beta}=\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta),$$

所谓坐标变换就是映射

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\quad V_{\beta\alpha}\to V_{\alpha\beta},$$

并记作 $\varphi_{\beta\alpha}$.显然,$\varphi_{\beta\alpha}$是一个同胚.因为 $V_{\beta\alpha}$和 $V_{\alpha\beta}$都是欧氏空间的开集,自然可以考虑 $\varphi_{\beta\alpha}$的可微性.

拓扑空间 X 的一个 n 维坐标集称为 $r(r\geqslant0)$阶的或 C^r 的,如果其中所有的坐标变换都是 r 次可微的,其中的坐标系也称为 C^r 相容的.

X 的一个极大的 C^r 坐标集,即不能加进新的坐标系而保持其 C^r 的性质,称为 X 的一个 C^r **微分结构**.

定义 1.3.2 给定了一个 C^r 微分结构的拓扑空间称为 r 阶的或 C^r 的**微分流形**.

如果在拓扑空间 X 上给定了一个 C^r 坐标集,加上所有与之 C^r 相容的坐标系就成为一个 C^r 微分结构,并且不难证明,X 的两

个C^r相容的C^r坐标集决定同一个C^r微分结构.因此,说一个拓扑空间X是一个n维C^r微分流形只须在X上给定了一个n维的C^r坐标集.

特别,当$r=\infty$时,即坐标变换都是无穷次可微的,则X称为C^∞流形或光滑流形;当$r=\omega$时,即坐标变换都是解析的,则X称为解析流形.一般的,以后提到的微分流形都指的是C^∞流形.

因为坐标变换$\varphi_{\beta\alpha}=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$是$V_{\beta\alpha}$到$V_{\alpha\beta}$上的同胚,且$\varphi_{\alpha\beta}=\varphi_{\beta\alpha}^{-1}$,所以,微分流形上所有坐标变换都是正规的,即坐标变换的函数行列式恒不为零.在一个微分流形上,若存在一个坐标变换的函数行列式恒大于零的坐标集,则此微分流形称为**可定向的**.在一个可定向的微分流形上,若规定其微分结构中所有坐标变换的函数行列式都大于零,则说取定了微分流形的**一个定向**,其余的坐标系所构成的坐标集则构成一个相反的定向.

例 1.3.1 $R^0=\{0\}$可看作零维的欧氏空间.所以,离散的拓扑空间都可以看作是零维的微分流形.

例 1.3.2 一维欧氏空间R^1即直线,由恒同映射

$$i:R^1\to R^1$$

自然给出一个微分结构,由此构成一个一维的微分流形.同样的方法,在n维欧氏空间R^n以及R^n的任意开集上也都自然地给出一个微分结构,构成n维微分流形.

若在直线R^1上给一坐标系

$$\varphi:R^1\to R^1$$

使$\varphi(x)=x^3$,它也决定R^1的一个微分结构,对这个微分结构,它也构成一个微分流形.但是,作为微分流形,它与前面所说的不同,因为这里给定的坐标系与前面所说的坐标系并不相容.

例 1.3.3 取两条具有相同微分结构的直线,粘合其一半面不粘其交叉点,仍构成一个一维的微分流形,但作为拓扑空间,它不是T_2空间.

一般的,我们均假设流形是T_2的拓扑空间且有可数基.

若在粘合中将交叉点也粘合起来,则不是流形,因为在交叉点

不存在与 R^1 同胚的邻域.

例 1.3.4　球面. 分别由南极和北极作球极投影,则得到球面的一个二维坐标集,不难证明,它是 C^∞ 的,从而使球面构成一个二维的微分流形.

例 1.3.5　环面. 单位圆周 C 可以看作是模 1 的复数的集合,即由复数平面上的点

$$\{e^{2\pi\theta i},\quad \theta \in R\}$$

构成的,并由之自然得到 C 与直线 R^1 之间的对应关系.显然

$$I_1 = \{e^{2\pi\theta i},\quad 0 < \theta < 1\},\quad I_2 = \left\{e^{2\pi\theta i}, \frac{1}{2} < \theta < \frac{3}{2}\right\}$$

是 C 上的一个 C^ω 坐标集,使 C 成为一个解析流形.

环面 T 可以看作是两个圆周的笛卡积,即 $T = C \times C$. 容易看出

$$I_1 \times I_1,\quad I_1 \times I_2,\quad I_2 \times I_1,\quad I_2 \times I_2$$

是 T 上的一个二维的 C^ω 坐标集,使 T 成为一个二维的解析流形.

圆周 C 可看作为一维的环,也记作 T^1,一个 n 维环面是指

$$T^n = \overbrace{T^1 \times \cdots \times T^1}^{n个}.$$

类似的方法可以给出 T^n 的一个 n 维 C^ω 坐标集,使 T^n 成为一个 n 维的解析流形.

例 1.3.6　一般线性群. 设 V 是实数域 R 上的 n 维向量空间,V 上的全体非奇的线性变换对变换的乘法构成一个群,称为 n 阶实的一般线性群,记作 $GL(n,R)$,它也可以看作是由全体实的 n 阶非奇方阵对矩阵的乘法所成的群.因此,它自然可以看作为 n^2 维欧氏空间中的一个开集,成为一个 n^2 维微分流形.

例 1.3.7　射影空间. $n+1$ 维欧氏空间 R^{n+1} 中过原点 O 的全体直线所构成的集合,可给定一个自然的微分结构使成为一个 n 维微分流形,称为 n 维射影空间,记作 P^n,其微分结构具体构造如下.

设 $x,y\in R^{n+1}-\{0\}$. x 和 y 称为等价的,如果存在实数 λ 使得 $x=\lambda y$,并将 x 决定的等价类记作$[x]$. 于是,n 维射影空间

$$P^n=\{[x]\mid x\in R^{n+1}-\{0\}\}.$$

记$(x_1,\cdots,x_{n+1})$是 x 在R^{n+1}中一个给定坐标系的坐标,我们也称它为 P^n 中的点$[x]$的**齐次坐标**,记作$[x_1,\cdots,x_{n+1}]$. 显然,$x_1,\cdots,x_{n+1}$不能全为零,且齐次坐标并不惟一,它允许相差任意一个非零的倍数,即$[x_1,\cdots,x_{n+1}]$与$[\lambda x_1,\cdots,\lambda x_{n+1}]$($\lambda\neq 0$)表示 P^n 中的同一个点. 由此便可进一步得到 P^n 中的一个坐标集. 令

$$U_\alpha=\{[x_1,\cdots,x_\alpha,x_{n+1}]\mid x_\alpha\neq 0\},\quad \alpha=1,\cdots,n+1.$$

并定义映射

$$\varphi_\alpha:\quad U^\alpha\to R^n,$$

$$\varphi_\alpha([x_1,\cdots,x_{n+1}])=(\xi_\alpha^1,\cdots,\xi_\alpha^{\alpha-1},\xi_\alpha^{\alpha+1},\cdots,\xi_\alpha^{n+1}),\quad \alpha=1,\cdots,n+1,$$

其中

$$\xi_\alpha^i=x_i/x_\alpha,\quad i\neq\alpha,\alpha=1,\cdots,n+1.$$

显然,$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}(\alpha=1,\cdots,n+1)$是 P^n 的一个 n 维坐标集. 并且,在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 中,$x_\alpha\neq 0\neq x_\beta$,其中点的坐标$(\xi_\alpha^i)$和$(\xi_\beta^i)$之间的变换关系

$$\xi_\alpha^i=\xi_\beta^i/\xi_\beta^\alpha,\quad i\neq\alpha,\beta,\quad \xi_\alpha^\beta=1/\xi_\beta^\alpha,$$

是 C^∞的. 因此,P_n 是一个 n 维的微分流形.

进一步可以考虑 n 维向量空间中所有 $k(\leqslant n)$维子空间集合 $G(k,n)$,在其中也可以引进微分结构使其成为 $k(n-k)$维微分流形,称为 Grassmann 流形. 在 $k=1$ 时,$G(1,n)$就是 $n-1$ 维射影空间 P^{n-1}.

例 1.3.8 设 f 是 $R^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1,\cdots,x_n\in R\}$($n>1$)上的一个 C^∞的实函数,

$$M=\{p\in R^n\mid f(p)=0\},$$

且在 M 的每一点 p,$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_p\neq 0$. 由隐函数存在定理,在 M 的任一点 p,都有包含 p 的一个邻域(关于 M 对 R^n 的诱导拓

扑)与 R^n 的一个超平面($n-1$ 维的)的一个开集的一个 C^∞ 同胚,这就给出了 M 上的一个微分结构.因此,M 就成为一个 $n-1$ 维的微分流形.

一个 n 维的球面 S^n 可以看作是 $n+1$ 维欧氏空间 R^{n+1} 中的点集

$$S^n = \{x \in R^{n+1} \mid x^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = a^2, a > 0\},$$

其中 x 表示点的向径,$(x_1,\cdots,x_n)$ 是 x 的坐标.由上所说,S^n 是一个 n 维的微分流形.

一般的,若 $f_1,\cdots,f_k(k<n)$ 都是 R^n 上的实函数,

$$M = \{p \in R^n \mid f_i(p) = 0, i = 1,\cdots,k\},$$

且在 M 的每一点 p,$f_1,\cdots,f_k$ 的 Jacobi 矩阵的秩都是 k,类似地,可给出 M 的一个微分结构使 M 成为一个 $n-k$ 维的微分流形.

在微分流形的定义中,若坐标卡可取在复数空间 C^n 中,则得到复流形.它可以看作为受到一定限制定件的 $2n$ 维的实流形.因面,这是一种特殊的情形.

若坐标卡可取在 $R_+^n(x_1 \geqslant 0)$ 中,则得到带边的流形,并以无边的流形为特例.因而,这是一种推广.

§4 切 空 间

在引进了微分流形的概念以后,自然就要讨论定义在微分流形上的函数以及其连续、可微等性质.

设 A 是 n 维微分流形 M 上的一个开集,R 为实数域,映射

$$f: \quad A \to R \qquad (1.4.1)$$

称为定义在 A 上的一个实函数;f 称为 $C^s(s \geqslant 0)$ 的,如果对 M 上的任意坐标系 (U,φ),$f\circ\varphi^{-1}$ 都是 $\varphi(A)(\subset R^n)$ 上的 C^s 函数,当 $s=0$ 时,就是所谓连续函数,$s \geqslant 1$ 时就是可微函数.

若 M 是 C^∞ 微分流形,$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 是覆盖 A 的一族 C^∞ 坐标系,则函数 f 是 C^s 的只须所有的 $f\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 都是 C^s 的.以后提到函

数时，均指可微函数或 C^∞ 函数.

对于定义在 n 维欧氏空间 R^n 上的函数，进一步首先讨论的就是所谓方向导数. 设 X_m 是在 R^n 的一点 m 的一个向量，f 是定义在 m 的一个邻域上的可微函数，f 在点 m 沿向量 X_m 的方向导数就是

$$X_m f = X_m \cdot (\nabla f)_m, \tag{1.4.2}$$

式中"·"表示两个向量的内积，∇f 是函数 f 的梯度向量. 设 $(x^1,\cdots,x^n)$ 是 R^n 中的坐标，$(X_m^1,\cdots,X_m^n)$ 是向量 X_m 的坐标，将(1.4.2)的右端用坐标表示就得到

$$X_m f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_m X_m^i. \tag{1.4.3}$$

特别，对所有的坐标函数 $x^i(i=1,\cdots,n)$，即

$$x^i(m) = m^i, \qquad m \in R^n, i = 1,\cdots,n,$$

其中 $m^i(i=1,\cdots,n)$ 是点 m 的坐标，则有

$$X_m x^i = X_m^i, \qquad m \in R^n, i = 1,\cdots n.$$

这里，向量 X_m 的作用在于它对定义在 m 的邻域的任意可微的实函数都对应一个实数，并且，对任意的实数 λ 和 μ，以及定义在 m 的一个邻域上的任意可微函数 f 和 g，

$$X_m(\lambda f + \mu g) = \lambda X_m f + \mu X_m g,$$
$$X_m(fg) = f(m) X_m g + g(m) X_m f.$$

以下我们利用上述方向导数的性质来定义微分流形上的切向量.

设 M 是 n 维的微分流形，m 是 M 上任意一点，F_m 是在 m 的某一个邻域上定义的可微的实值函数的全体构成的集合，问题是 F_m 中的任意两个函数的定义域可能不同，我们无法对它们进行运算，而函数在一点的方向导数只与函数在这一点的邻域的值有关，因此，我们只须考虑这些函数的一种等价类.

设 $f,g \in F_m$，f 和 g 称为**等价的**，如果存在 m 的邻域 H，使在 H 上 f 和 g 相等. 容易验证，上述关系确实是一个等价关系，并将由 f 决定的等价类记作 $\tilde{f}$，全体这样的等价类记作 $\tilde{F}_m$，其中的元素也称作在 m 的**函数芽**. 这样，在 $\tilde{F}_m$ 中不仅可以定义实数与

函数芽的乘积，还可以定义任意两个函数芽的和与积.

定义 1.4.1 映射

$$X:\quad \widetilde{F}_m \to R$$

称为在微分流形 M 上的一点 m 的**切向量**，如果对任意的 $\widetilde{f},\widetilde{g}\in \widetilde{F}_m$，$\lambda,\mu\in R$ 均成立

1. $X(\lambda\widetilde{f}+\mu\widetilde{g})=\lambda X\widetilde{f}+\mu X\widetilde{g}$，　　(1.4.4)

2. $X(\widetilde{f}\widetilde{g})=\widetilde{f}(m)X\widetilde{g}+\widetilde{g}(m)X\widetilde{f}$，　　(1.4.5)

其中 $\widetilde{f}(m)=f(m)$，f 是等价类 $\widetilde{f}$ 中任一元素.

在一点 m 的全体切向量的集合称为微分流形 M 在点 m 的**切空间**，记作 M_m.

进一步可以规定在 M_m 中任意两个切向量的和以及数乘切向量.

定义 1.4.2 设 $X,Y\in M_m$，$\lambda\in R$，$\widetilde{f}\in\widetilde{F}_m$，定义

$$(X+Y)\widetilde{f}=X\widetilde{f}+Y\widetilde{f},$$

$$(\lambda X)\widetilde{f}=\lambda(X\widetilde{f}).$$

$X+Y$ 称为 X 与 Y 的和，λX 称为数 λ 与 X 的乘积. 显然，$X+Y$ 与 λX 都是 $\widetilde{F}_m$ 到 R 的映射，且满足条件(1.4.4)和(1.4.5). 所以，$X+Y$ 和 λX 都是 M_m 中的切向量. 这样，在 M_m 中就定义了线性运算，并且不难验证，对上述线性运算，M_m 构成一个向量空间.

若 $f\in F_m$，我们自然可以规定

$$Xf=X\widetilde{f},\qquad X\in M_m.$$

可见，$Xf=Xg$ 只须 $f\sim g$，即 f 与 g 在 m 的某一个邻域上相等. 所以，在以后的叙述中，我们常不严格区分 f 与 $\widetilde{f}$.

因为切向量是一个局部性质，为了进一步将切向量的概念具体化，并弄清切空间的结构，我们不妨借助于坐标.

设 (U,φ) 是任意取定的在 m 近旁的一个坐标系，x 是 U 中的任意一点，$\varphi(x)(\in R^n)$ 就是 x 的坐标. 于是，定义在 U 上的任意函数 f 就可以表现为定义在 n 维欧氏空间 R^n 的开集 $\varphi(U)$ 上的函数 $f\circ\varphi^{-1}$，即

$$f(x)=f\circ\varphi^{-1}(\varphi(x)),\quad x\in U.\qquad(1.4.6)$$

进一步，若在 R^n 中取定一个坐标系，则 $\varphi(x)$ 又可以通过它在 R^n 的坐标 $\varphi(x)^i(i=1,\cdots,n)$ 即 x 的坐标 $x^i(i=1,\cdots,n)$ 来表示. 这样，$f\circ\varphi^{-1}$ 就表示为多元函数 $f\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^n)$，于是我们就可以通过 $f\circ\varphi^{-1}$ 这一多元函数的偏导数来定义 f 的偏导数.

定义 1.4.3 设 $m\in M$，(U,φ) 是在 m 近旁的一个坐标系，$f\in F_m$，规定

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m f=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(m)),$$

并称之为函数 f 在点 m 对 x 的**偏导数**，其中 $x^i(i=1,\cdots,n)$ 表示 U 中任一点 x 的坐标.

显然，若 $f\sim g$，则 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m f=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m g$，于是，自然地可以规定 $\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_m \tilde{f}=\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_m f$. 这样，$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m$ 就可以看作是映射

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m:\quad \tilde{F}_m\to R.$$

并且，对任意的 $\tilde{f},\tilde{g}\in\tilde{F}_m$ 和 $\lambda,\mu\in R$，我们有

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m(\lambda\tilde{f}+\mu\tilde{g})=\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m\tilde{f}+\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m\tilde{g},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m(\tilde{f}\tilde{g})=\tilde{f}(m)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m\tilde{g}+\tilde{g}(m)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m\tilde{f}.$$

所以 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m(i=1,\cdots,n)$ 都是微分流形 M 在点 m 切向量，即 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m\in M_m$. 下面进一步证明，$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m(i=1,\cdots,n)$ 构成 M_m 的一组基.

引理 1.4.1 设 $(U,\varphi):(x^i)(i=1,\cdots,n)$ 是微分流形 M 在一点 m 近旁的一个坐标系，且 $x^i(m)=0(i=1,\cdots,m)$，则对任意的函数 $f\in F_m$，必有定义在 m 近旁的函数 $f_i(i=1,\cdots,n)$ 使

$$f=f(m)+x^if_i,\tag{1.4.7}$$

且有

$$f_i(m)=\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_m f.\tag{1.4.8}$$

证明 设

$$\tilde{f}=f\circ\varphi^{-1},$$

这是在 R^n 中包含 $\varphi(m)$ 的一个开集上定义的函数. 由假设 $x^i(m)=0$, 即 $\varphi(m)$ 是 R^m 的原点, 故不妨假设 $\tilde{f}$ 在 R^n 的一个以原点 O 为中心的球内定义. 令

$$\psi(t)=\tilde{f}(ta^1,\cdots,ta^n),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$(a^1,\cdots,a^n)$ 是定义域内的任意点. 显然, $\psi(t)$ 是有意义的, 并且

$$\tilde{f}(a^1,\cdots,a^n)=\psi(1)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\psi(0),$$

而

$$\psi(0)=\tilde{f}(0,\cdots,0)=f\circ\varphi^{-1}(\varphi(m))=f(m),$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right)_{x^i=a^it}=a^i\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x^i}(a^1t,\cdots,a_nt).$$

令

$$\tilde{f}_i(a^1,\cdots,a^n)=\int_0^1\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x^i}(a^1t,\cdots,a^nt)\mathrm{d}t,$$

$$f_i=\tilde{f}_i\circ\varphi^{-1}.$$

则有 M 上包含 m 的邻域 U, 对任意的 $x\in U$,

$$\begin{aligned}f(x)&=\tilde{f}\circ\varphi(x)=\tilde{f}(x^1,\cdots,x^n)\\&=f(m)+x^i\tilde{f}_i(x^1,\cdots,x^n)=f(m)+x^if_i(x),\end{aligned}$$

即

$$f=f(m)+x^if_i,$$

式中 $f(m)$ 为常值函数, 并且

$$\begin{aligned}f_i(m)&=\tilde{f}_i(0,\cdots,0)=\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x^i}(0,\cdots,0)\\&=\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}(\varphi(m))=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m f.\end{aligned}$$

这就证明了引理.

定理 1.4.1 设 M 是一个 n 维的微分流形，$\varphi:(x^i)(i=1,\cdots,n)$是在点 m 近旁的一个坐标系，X 是在 m 的一个任意的切向量，则

$$X = Xx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m,$$

并且，$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m$ 构成M_m 的一组基.

证明 由切向量的性质，对任意的常数 C，

$$\begin{aligned} XC &= X(1\cdot C) = 1(XC) + C(X1) \\ &= 1(XC) + 1(XC) = 2XC, \end{aligned}$$

所以

$$XC = 0.$$

设

$$y^i = x^i - x^i(m), \quad i = 1,\cdots,n.$$

因为

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \delta^i_j,$$

所以$(y^i)(i=1,\cdots,n)$也是 m 近旁的一个坐标系，并且有

$$y^i(m) = 0, \quad i = 1,\cdots,n,$$

以及

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_m = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m, \quad i = 1,\cdots,n.$$

设 f 是定义在 m 近旁的任意一个可微函数，由引理 1.4.1，有 $f_i(i=1,\cdots,n)$使

$$f = f(m) + y^i f_i,$$

$$f_i(m) = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_m f = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m f, \quad i = 1,\cdots,n.$$

于是

$$\begin{aligned} Xf &= Xf(m) + y^i(m)Xf_i + f_i(m)Xy^i \\ &= f_i(m)Xy^i = f_i(m)X(x^i - x^i(m)) \end{aligned}$$

$$= f_i(m) X x^i = X x^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_m f,$$

所以

$$X = X x^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_m .$$

这就证明了在 m 的任意切向量 X 都可以表示为 $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_m$ $(i = 1, \cdots, n)$ 的线性组合. 为进一步证明 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m$ $(i=1,\cdots,n)$ 是 M_m 的一组基,只须证明它们是线性无关的. 若有常数 $a^1, \cdots, a^n$ 使得

$$Y = a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_m = 0,$$

则对任意的坐标函数 $x^j (j = 1, \cdots, n)$ 都有

$$Y x^j = 0, \quad j = 1, \cdots, n.$$

而

$$Y x^j = a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_m x^j = a^i \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^i} \right)_{\varphi(m)}$$
$$= a^i \delta_i^j = a^j, \quad j = 1, \cdots, n.$$

所以

$$a^j = 0, \quad j = 1, \cdots, n.$$

即 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m$ $(i = 1, \cdots, m)$ 是线性无关的.

由此可知, M_m 是一个 n 维的向量空间. 并且,由任意给定的 M 中的一个坐标系 (x^i),在坐标域中的任意一点 m 的切空间中就得到一组由它决定的基 $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_m$ $(i = 1, \cdots, n)$,并称之为对给定坐标系 (x^i) 的自然基.

定义 1.4.4 在微分流形 M 上的任意一点 m 近旁定义的可微函数 $f(\in F_m)$ 在点 m 的微分 $(\mathrm{d}f)_m$ 是定义在 m 的切空间 M_m 上的一个函数,即

$$(\mathrm{d}f)_m : \quad M_m \to R,$$

并且,对任意的 $X\in M_m$,

$$(\mathrm{d}f)_m(X)=Xf.$$

由定义,对任意的 $X,Y\in M_m,\lambda,\mu\in R$,

$$(\mathrm{d}f)_m(\lambda X+\mu Y)=(\lambda X+\mu Y)f=\lambda Xf+\mu Yf$$
$$=\lambda(\mathrm{d}f)_m(X)+\mu(\mathrm{d}f)_m(Y),$$

所以,$(\mathrm{d}f)_m$ 是 M_m 上的一个线性函数,也就是 M_m 的对偶空间 M_m^* 上一个元素.并且,由微分的定义和切向量的性质就能得到下列关于微分的性质:对在 m 近旁定义的任意可微函数 f 和 g,以及任意的实数 λ 和 μ,

$$(\mathrm{d}(\lambda f+\mu g))_m=\lambda(\mathrm{d}f)_m+\mu(\mathrm{d}g)_m,$$
$$(\mathrm{d}fg)_m=f(m)(\mathrm{d}g)_m+g(m)(\mathrm{d}f)_m.$$

设 $(x^i)(i=1,\cdots,n)$ 是在 m 近旁的一个坐标系,则 $(\mathrm{d}f)_m$ 在 M_m 的自然基 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m$ 上的值为

$$(\mathrm{d}f)_m\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m f,\quad i=1,\cdots,n.$$

即 f 在点 m 的偏导数.特别,对坐标函数 $x^i(i=1,\cdots,n)$,

$$(\mathrm{d}x^i)_m\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_m\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_m x^i=\delta_j^i,\quad i,j=1,\cdots,n.$$

所以,$(\mathrm{d}x^i)_m(i=1,\cdots,n)$ 是 M_m 的自然基 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m(i=1,\cdots,n)$ 在 M_m^* 中的对偶,并且

$$(\mathrm{d}f)_m=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m f(\mathrm{d}x^i)_m.\tag{1.4.9}$$

在欧氏空间中,这就是通常的微分表达式.

M_m^* 又称为微分流形 M 在点 m 的**微空间或余切空间**.

综上所述,对 n 维微分流形 M,在它的每一点都有一个切空间,一个 n 维的向量空间,于是,我们自然可以在微分流形的每一点切空间上建立它们的张量代数和外代数.并且,对微分流形上任意给定的一个坐标系,在坐标域的每一点的切空间中就给出了一

组自然基.对于微分流形,坐标变换是必须讨论的问题.因此,我们也就自然要考虑在流形的坐标变换下相应的在切空间中自然基之间的变换.

设(U,φ):(x^i)和(U',φ'):$(x^{i'})$$(i=1,\cdots,n)$是 M 上任意给定的两个坐标系,且 $U\cap U'$非空,于是,对 $U\cap U'$中任意一点 m,在 M_m 中分别有相应的自然基$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m$ 和$\left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\right)_m$.因为,对任意的 $f\in F_m$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\right)_m f=\left(\frac{\partial(f\circ\varphi'^{-1})}{\partial x^{i'}}\right)_{\varphi'(m)}=\left(\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\right)_{\varphi(m)}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)_{\varphi'(m)}$$
$$=\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)_{\varphi'(m)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m f,$$

所以

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\right)_m=\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)_{\varphi'(m)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m,$$

并不妨简写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\right)_m=\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)_m\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m. \tag{1.4.10}$$

可见,经微分流形上的坐标变换,在一点 m 的切空间的相应的自然基之间为一非奇线性变换,其变换矩阵就是变换在这一点的Jacobi矩阵.

由(1.4.10)立即可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m=\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_m\left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\right)_m, \tag{1.4.11}$$

以及

$$(\mathrm{d}x^{i'})_m=\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_m(\mathrm{d}x^i)_m,\quad (\mathrm{d}x^i)_m=\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)_m(\mathrm{d}x^{i'})_m.$$

进一步,若 M_m 上的一个(r,s)阶张量 t 对上述两组自然基的坐标分别为$\left(t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\right)$和$\left(t^{i_{1'}\cdots i_{r'}}_{j_{1'}\cdots j_{s'}}\right)$,由(1.1.10)~(1.1.13)以及张量的坐标变换公式(1.1.8)和(1.1.9),

$$t^{i_{1'}\cdots i_{r'}}_{j_{1'}\cdots j_{s'}} = t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\left(\frac{\partial x^{i_{1'}}}{\partial x^{i_1}}\right)_m\cdots\left(\frac{\partial x^{i_{r'}}}{\partial x^{i_r}}\right)_m\left(\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_{1'}}}\right)_m\cdots\left(\frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{j_{s'}}}\right)_m,$$

$$t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} = t^{i_{1'}\cdots i_{r'}}_{j_{1'}\cdots j_{s'}}\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_{1'}}}\right)_m\cdots\left(\frac{\partial x^{i_r}}{\partial x^{i_{r'}}}\right)_m\left(\frac{\partial x^{j_{1'}}}{\partial x^{j_1}}\right)_m\cdots\left(\frac{\partial x^{j_{s'}}}{\partial x^{j_s}}\right)_m.$$

这就是张量 t 对不同的自然基的坐标之间的变换公式.

§5 向量场、微分式

设 M 是 n 维分流形,A 是 M 的一个开集.

定义 1.5.1 定义在 A 上的取值于每一点的切空间的一个映射,称为 A 上的一个**向量场**.

设 X 是 A 上的一个向量场,m 是 A 中的任一点,则 X 在 m 的值 $X(m)$ 是在 m 的切空间 M_m 中的一个切向量,也常记作 X_m. 即

$$X:\quad A\to\bigcup_{m\in A}M_m,$$

使 $X(m)=X_m\in M_m$.

由切向量的线性运算自然就可以规定向量场的线性运算.设 X、Y 是 A 上的向量场,λ 为任意实数,m 是 A 中的任意一点,则可定义 X 与 Y 的和以及数 λ 与 X 的积:

$$(X+Y)_m = X_m + Y_m,$$
$$(\lambda X)_m = \lambda X_m.$$

显然,$X+Y$ 和 λX 仍是 A 上的向量场.并且,不难证明,A 上全体向量场的集合对上述线性运算构成一个线性空间,不过,这个线性空间不是有限维的.

事实上,还可以规定 A 上的任意一个函数 f 与向量场 X 的乘积:

$$(fX)_m = f(m)X_m.$$

设 $U:(x^i)(i=1,\cdots,n)$ 是 M 中的一个坐标系,则对 U 中的每一点 m,都有 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m$ $(i=1,\cdots,m)$,于是就自然得到 U 上的 n

个向量场

$$\frac{\partial}{\partial x^i}:\quad m\to\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m(\in M_m),\quad i=1,\cdots,n.$$

由于它们在 U 上的每一点 m 都构成 M_m 的一组基,所以,U 上的任意一个向量场 X 都可以表示为

$$X=\xi^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m,\tag{1.5.1}$$

其中 $\xi^i(i=1,\cdots,n)$都是 U 上的函数,因此也都可以表示为坐标$(x^1,\cdots,x^n)$的函数.(ξ^i)称为向量场 X 对自然基的坐标.借助坐标,向量场的运算就可以通过坐标进来进行,设 $X=\xi^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$,$Y=\eta^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$,$f$ 是 U 上的函数,则

$$X+Y=(\xi^i+\eta^i)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$fX=f\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

设 U':$(x^{i'})$是 M 的另一个坐标系,$U\cap U'$ 非空,则在 $U\cap U'$中,向量场 X 又可以表示为

$$X=\xi^{i'}\frac{\partial}{\partial x^{i'}}=\xi^{i'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial}{\partial x^i},\tag{1.5.2}$$

比较(1.5.1)和(1.5.2)就得到向量场的坐标变换公式

$$\xi^i=\xi^{i'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\tag{1.5.3}$$

或

$$\xi^{i'}=\xi^i\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}.\tag{1.5.4}$$

定义 1.5.2 向量场 X 称为C^∞的,如果对任意的 C^∞函数 f,Xf 都是C^∞的,其中 Xf 定义为

$$(Xf)(m)=X_mf,\quad m\in M.\tag{1.5.5}$$

显然,在局部坐标系 U:$(x^i)(i=1,\cdots,n)$中,$X=\xi^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$是

C^∞的，必须且只须它的所有坐标 $\xi^1,\cdots,\xi^n$ 都是 C^∞ 的. 在 M 上的向量场是 C^∞ 的，只须它在一个 C^∞ 坐标集中的所有坐标都是 C^∞ 的.

由(1.5.5)，向量场作为作用于函数的运算子自然可以规定它们的乘法. 设 X 和 Y 是 A 上的 C^∞ 向量场，f 是 A 上的 C^∞ 函数，则 Yf 也是 C^∞ 的，并可定义 XY.

$$(XY)f = X(Yf)$$

或

$$(XY)_m f = X_m(Yf), \quad m \in A. \tag{1.5.6}$$

问题是 XY 是否仍为 A 上的向量场，即 $(XY)_m$ 是否为点 m 的一个切向量. 为此，我们需要验证它是否满足切向量条件(1.4.4)和(1.4.5).

由(1.5.6)，容易看出

$$(XY)_m(\lambda f + \mu g) = \lambda (XY)_m f + \mu (XY)_m g. \tag{1.5.7}$$

对任意的 $\lambda,\mu \in R$, $f,g \in F_m$ 成立，即(1.4.4)满足. 但是

$$\begin{aligned}(XY)_m(fg) &= X_m(Yfg) = X_m(fYg + gYf) \\ &= f(m)X_m(Yg) + X_m f(Yg)(m) \\ &\quad + g(m)X_m(Yf) + X_m g(Yf)(m) \\ &= f(m)(XY)_m g + g(m)(XY)_m f \\ &\quad + X_m f Y_m g + X_m g Y_m f,\end{aligned} \tag{1.5.8}$$

条件(1.4.5)不满足，所以 XY 不是向量场.

定义 1.5.3 设 X、Y 是 M 的任一开集 A 上的 C^∞ 向量场，f 是 A 上的任一 C^∞ 函数，定义

$$[X,Y]_m f = X_m(Xf) - Y_m(Xf), \tag{1.5.9}$$

即

$$[X,Y] = XY - YX,$$

并称之为 X 与 Y 的**换位子**.

由(1.5.7)和(1.5.8)，

$$[X,Y]_m(\lambda f + \mu g) = \lambda [X,Y]_m f + \mu [X,Y]_m g,$$

$$[X,Y]_m(fg) = f(m)[X,Y]_m g + g(m)[X,Y]_m f$$

成立.所以$[X,Y]$是 A 上的一个C^∞向量场.

定理 1.5.1 设 X,Y 和 Z 是 A 上的 C^∞ 向量场,$\lambda,\mu\in R$,则有

1. $[X,Y]=-[Y,X]$.
2. $[\lambda X+\mu Y,Z]=\lambda[X,Z]+\mu[Y,Z]$.
3. $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$.

这些性质容易由定义直接验证,其中 3 称为 **Jacobi 恒等式**.

设 $V(A)$上全体 C^∞ 向量场的集合,在其中规定了线性运算和换位子运算,由定理 1.5.1, $V(A)$对上述运算构成一个无穷维的**李代数**.

对换位子运算,还成立下面的公式:

$$[fX,gY] = f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X,Y], \tag{1.5.10}$$

对任意的 C^∞ 函数 f 和 g 成立.这是因为,对任意的 C^∞ 函数 h,

$$\begin{aligned}
[fX,gY]h &= (fX)(gYh) - (gY)(fXh)\\
&= f(Xg)(Yh) + fgX(Yh) - g(Yf)(Xh) - gfY(Xh)\\
&= f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X,Y]h.
\end{aligned}$$

设 $U:(x^i)(i=1,\cdots,n)$是 M 上任意给定的一个坐标系,$X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$和 $Y=\eta^i\frac{\partial}{\partial x^i}$是$U$ 上的两个 C^∞ 向量场.由(1.5.10)

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= [\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i},\eta^j\frac{\partial}{\partial x^j}]\\
&= \xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \eta^j\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^i\eta^j[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}],
\end{aligned}$$

注意到偏导数的交换性,即

$$[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}] = 0,\quad i,j = 1,\cdots,n.$$

所以

$$[X,Y] = \left(\xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i} - \eta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{1.5.11}$$

这就是换位子的坐标表示.

类似地,可以进一步定义在微分流形 M 的一个开集 A 的**张量场**.特别,p 阶反称协变张量场称为 **p 次外微分形式**,也简称为 **p 次微分形式**或 **p 次微分式**.一个一阶协变向量场 ω 称为一次微分形式,它在 A 中的一每一点 m 都决定其切空间 M_m 上的一个线性函数即一个一次形式 $\omega(m)$.

自然可以将有关外形式的线性运算和外积运算推广到微分式.设 φ 和 ω 是 A 上的两个任意的微分式,则定义

$$(\lambda\varphi+\mu\omega)_m=\lambda\varphi_m+\mu\omega_m,\quad \lambda,\mu\in R, m\in A, \tag{1.5.12}$$

$$(\varphi\wedge\omega)_m=\varphi_m\wedge\omega_m,\quad m\in A, \tag{1.5.13}$$

并且,对任意的 A 上的函数 f,

$$(f\varphi)_m=f(m)\varphi_m. \tag{1.5.14}$$

式中 φ_m 表示 φ 在 m 的值 $\varphi(m)$.由于函数 f 可以看作是零次微分式,(1.5.14)可以看作是(1.5.13)的一个特殊情形.

根据微分形式的定义,一个一次微分形式 ω 也可以看作是定义在 $V(A)$ 的一个函数,取值于 A 上的全体函数的集合 $F_0(A)$,即

$$(\omega(X))(m)=\omega_m(X_m),\quad X\in V(A), m\in A.$$

并且在每一点都是线性的.于是,显然有下列定理.

定理 1.5.2 $\omega: V(A)\to F_0(A)$ 是一个一次微分形式必须且只须对 A 上的任意函数 f 和 g,

$$\omega(fX+gY)=f\omega(X)+g\omega(Y),\quad X,Y\in V(M). \tag{1.5.15}$$

性质(1.5.15)可以看作是通常的线性性质的推广,它表明在每一点都是线性的,也简称为 f 线性的.

进一步地,一个 p 次微分形式 ω 可看作映射

$$\omega: \overbrace{V(A)\times\cdots\times V(A)}^{p\uparrow}\to F_0(A),$$

它对每一个变元都是 f 线性的,并且是反称的.

设 $U:(x^i)(i=1,\cdots,n)$ 是 M 上的一个任意的坐标系,则

$$\mathrm{d}x^i : m(\in U) \to (\mathrm{d}x^i)_m(\in M_m^*), \quad i = 1,\cdots,n$$

都是 U 上的一次微分式，并且在每一点都是线性无关的．所以，U 上的任意一个一次微分式 ω 都可以表示为

$$\omega = a_i \mathrm{d}x^i,$$

其中 $a_i(i=1,\cdots,n)$是定义在 U 上的函数，

$$a_i(m) = \omega_m\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right), \quad i = 1,\cdots,n, m \in U$$

或

$$a_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \quad i = 1,\cdots,n,$$

并称之为 ω 的坐标．

同样的，一个 p 次微分式 φ 也可以用坐标表示为

$$\varphi = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n} \varphi_{i_1\cdots i_p} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$$

或

$$\varphi = \frac{1}{p!}\varphi_{i_1\cdots i_p} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}.$$

其中

$$\varphi_{i_1\cdots i_p} = p!\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right), \quad i_1,\cdots,i_p = 1,\cdots,n.$$

定义 1.5.4 一个 p 次微分式 φ 称为 C^∞ 的．如果对任意的 C^∞ 向量场 $X_1,\cdots,X_p$，$\omega(X_1,\cdots,X_p)$都是 C^∞ 的．

显然，M 上的一个微分式是 C^∞ 的，必须且只须它在某一个 C^∞ 坐标集中的所有的坐标都是 C^∞ 的．

以上讨论的微分式在每一点的值都是实数，还可以进一步定义向量值的微分式，即其在每一点取值于一个向量空间．

设 L 是一个 k 维的向量空间，ω 称为 A 上的一个 p 次的 L 值的微分式，如果它在 A 上的每一点 m 都决定一个反称的 k 线性的映射

$$\omega_m : \overbrace{M_m \times \cdots \times M_m}^{k\text{次}} \to L.$$

设 $e_\alpha(\alpha=1,\cdots,k)$是 L 的一组基,则

$$\omega = \omega^\alpha e_\alpha,$$

其中 $\omega^\alpha(\alpha=1,\cdots,k)$都是通常的微分式. 于是,有关向量值微分式的线性运算都可以自然地依照普通微分式和向量的运算规律进行.

§6 外 微 分

设 M 是 n 维微分流形,A 是 M 上的一个开集,$F_r(A)(r=0,1,\cdots,n)$是定义在 A 上的全体 r 次的 C^∞ 微分形式的集合. 现在考虑 A 上的全体 C^∞ 微分形式的集合:

$$F(A) = \sum_{r=0}^{n} F_r(A).$$

在本章 §5 中,已经在 $\mathbf{F}(A)$中定义了加法和外积运算. 现进一步在$\mathbf{F}(A)$中定义**外微分**运算.

定义 1.6.1 映射

$$d : \mathbf{F}(A) \to \mathbf{F}(A)$$

称为**外微分**,如果

1. $\mathrm{d}(\omega+\varphi)=\mathrm{d}\omega+\mathrm{d}\varphi,\ \omega,\varphi\in \mathbf{F}(A)$,

2. $\mathrm{d}(\omega\wedge\varphi)=\mathrm{d}\omega\wedge\varphi+(-1)^r\omega\wedge \mathrm{d}\varphi,\ \omega,\varphi\in \mathbf{F}(A)$,$r$ 为 ω 的次数,

3. 若 ω 是零次的,则 $\mathrm{d}\omega$ 为普通微分,

4. 若 ω 是零次的,$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0$.

自然要问,这个定义有没有意义? 这样的外微分运算是否存在? 惟一? 为回答这个问题,先证明外微分像普通微分一样是一个局部性质. 为此,需要下列引理.

引理 1.6.1 设 A 和B 是 n 维欧氏空间R^n 中的两个不相连的子集,且 A 是紧致的,B 是闭的,则存在 R^n 上的C^∞ 函数 φ,使 $\varphi|A=1,\varphi|B=0$.

证明 设 $0<a<b$,令

$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{x-a}\right), & x\in(a,b),\\ 0, & x\overline{\in}(a,b).\end{cases}$$

显然，f 是 R^1 上的 C^∞ 函数. 令

$$F(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\bigg/\int_a^b f(t)\mathrm{d}t,$$

则 F 仍是 R^1 上的 C^∞ 函数，并且，$0\leqslant F\leqslant 1$，

$$F(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a,\\ 0, & x\geqslant b.\end{cases}$$

进一步定义 R^n 上的函数 ψ：

$$\psi(x_1,\cdots,x_n)=F(x_1^2+\cdots+x_n^2),$$

则 ψ 是 R^n 上的 C^∞ 函数，$0\leqslant\psi\leqslant 1$，

$$\psi(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}1, & x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant a,\\ 0, & x_1^2+\cdots+x_n^2\geqslant b.\end{cases}$$

进一步，若 S 和 S' 是 R^n 中的两个同心球面，且 $S'\subset S$，则可由上述函数 ψ 经过一个自变量的线性变换，得到 R^n 上的函数，其函数值在 0 和 1 之间，且在 S' 的内部为 1，在 S 的外部为 0.

一般的，假设 R^n 的子集 A 是紧致的，B 是闭的，且有分别包含它们的不相交的开集，则 A 可被有限个开球 $B_1,\cdots,B_n$ 覆盖，即 $A\subset\bigcup_{i=1}^m B_i$，且使 $\overline{B}_i(i=1,\cdots,m)$ 与 B 不相交. 进一步又可将 B_i 收缩为同心球 $B_{i'}(i=1,\cdots,m)$，使 $B_{1'},\cdots,B_{m'}$ 仍是 A 的一个开覆盖. 设 $S_i,S_{i'}$ 是与 $B_i,B_{i'}(i=1,\cdots,m)$ 相对应的球面，则由以上的证明，存在 m 个 C^∞ 函数 $\psi_i(i=1,\cdots,m)$，使 $0\leqslant\psi_i\leqslant 1$，$\psi_i|B_{i'}=1$，$\psi|R^n-B_i=0$. 于是

$$\varphi=1-(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_m).$$

即为所求. 这是因为，当 $x\in A$ 时，则 x 必属于某一 $B_{i'}$，这时 $\psi_i(x)=1$，从而有 $\varphi(x)=1$，$\varphi|A=1$，当 $x\in B$ 时，x 必不属于任一 B_i，这时所有的 $\psi_i(x)=0$，即有 $\varphi(x)=0$，$\varphi|B=0$. 引理证毕.

将此引理推广到微分流形上就得到下列引理.

引理 1.6.2 设 M 是 n 维微分流形，C 是 M 的一个紧致子集，V 是包含 C 的一个开子集. 则存在 M 上的 C^∞ 函数 φ，使 $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$，且 $\varphi|C = 1$，$\varphi|M - V = 0$.

当 $M = R^n$ 时，这就是引理 1.6.1 的结论. 这时，$A = C$，$B = M - V$.

证明 设 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 为 M 的一个 C^∞ 坐标集，S 为包含于某一 U_α 的紧致子集. 由引理 1.6.1，存在 C^∞ 函数 f 在 $\varphi_\alpha(U_\alpha)(\subset R^n)$ 中定义，它在 $\varphi_\alpha(S)$ 上的值为 1，在包含 $\varphi_\alpha(S)$ 的一个开集外的值为 0，令

$$F(q) = \begin{cases} f(\varphi_\alpha(q)), & q \in U_\alpha, \\ 0, & q \in U_\alpha, \end{cases}$$

则 F 在 M 上定义，它在 S 上的值为 1，在 U_α 外的值为 0.

因为 C 是紧致的，V 是开的，所以存在有限个邻域 $U_1, \cdots, U_m$，以及紧致子集 $S_1, \cdots, S_m$，使 $S_i \subset U_i (i = 1, \cdots, m)$，且

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{m} S_i,$$

于是必存在 C^∞ 函数 $F_i (i = 1, \cdots, m)$，使 F_i 在 S_i 上的值为 1，在 $V \cap U_i$ 外的值为零，则函数

$$\varphi = 1 - (1 - F_1)\cdots(1 - F_m)$$

即为所求.

由此引理即可明外微分 d 的局部性质.

定理 1.6.1 设 M 是 n 维微分流形，U 是它的一任开集，$\omega \in F(A)$，且 $\omega|U = 0$，则 $\mathrm{d}\omega|U = 0$.

证明 由流形的局部紧致性，对任一点 $p \in U$，必有 p 的邻域 W，使得 $p \in W \subset \overline{W} \subset U$，由引理 1.6.2，必有 M 上的 C^∞ 函数 h，使得

$$h(q) = \begin{cases} 1, & q \in W, \\ 0, & q \overline{\in} U. \end{cases}$$

于是 $h\omega \in F(A)$，且 $h\omega \equiv 0$. 因此，由外微分 d 的定义中的条件 1 和 2，

$$dh \wedge \omega + h d\omega = 0,$$

$$d\omega | W = 0.$$

特别，$(d\omega)_p=0$. 由于 p 是 U 中的任意一点，所以

$$d\omega | U = 0$$

由此定理立即可得，若 $\omega_1,\omega_2 \in F(W)$，且 $\omega_1 | U=\omega_2 | U$，则 $d\omega_1 | U=d\omega_2 | U$.

定理 1.6.2 设 M 为 n 维微分流形，A 是 M 的任一开集，则外微分

$$d: F(A) \to F(A)$$

惟一、存在.

证明 由 d 的局部性，只须在 M 的任意一个局部坐标系 $U:(x^i)(i=1,\cdots,n)$ 中证明.

先证惟一性，即一微分形式的外微分如果存在则必惟一. 由外微分的性质 1，只须对单项式 ω 证明. 若 ω 是零次的，由性质 3，$d\omega$ 是普通微分，它惟一确定. 若 ω 是 $k(\geqslant 1)$ 次的，则 ω 可表示为

$$\omega = a dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \quad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n,$$

其中 a 是 $(x^1,\cdots,x^n)$ 的 C^∞ 函数. 由外微分 d 的性质 1,2 和 4，$d\omega$ 若存在则必为

$$da \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

其中 da 即为普通微分，所以，$d\omega$ 惟一确定.

再证明存在性. 若 ω 是零次微分式，则 $d\omega$ 为普通微分，自然存在. 若 ω 是 $k(\geqslant 1)$ 次的，

$$\omega = a dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \quad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n,$$

则定义

$$d\omega = da \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \quad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n. \tag{1.6.1}$$

现只需证明如此定义的运算 d 确实是一外微分. 由(1.6.1) $d\omega$ 是一个 $k+1$ 次的微分式，即有 $d\omega \in F(A)$. 所以，d 是映射

$$d: F(A) \to F(A),$$

并且,性质 1 和 3 显然成立.由性质 1,要证明性质 2 成立只需对单项式进行验证,设

$$\omega = a\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r},$$
$$\varphi = b\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_s}.$$

则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\omega \wedge \varphi) &= \mathrm{d}(ab) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_s} \\ &= (b\mathrm{d}a + a\mathrm{d}b) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_s} \\ &= \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} \wedge b\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_s} \\ &\quad + (-1)^r a\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} \wedge \mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_s} \\ &= \mathrm{d}\omega \wedge \varphi + (-1)^r \omega \wedge \mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

性质 2 成立.又因为,对任意的 C^∞ 函数 f,

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}f) &= \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge \mathrm{d}x^i = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i \\ &= \sum_{j<i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i = 0,\end{aligned}$$

所以性质 4 成立.

这就证明了如此定义的运算 d 确实是外微分,并且,若 ω 是 k 次微分式,则 $\mathrm{d}\omega$ 是 $k+1$ 次的.还须注意的是,在证明中虽然利用了局部坐标系,但由 d 的惟一性与局部性,外微分 d 与局部坐标系的选取无关.

在外微分的定义中,性质 4 中 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0$ 只要求对任意零次微分式成立.由(1.6.1)立即可见,对任意的微分形式都成立.

定理 1.6.3 对任意的微分形式 ω,$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0$,即 $\mathrm{d}^2=0$.

这就是著名的 Poincaré 引理.

一个微分形式 ω 称为闭的,如果它的外微分等于零,即 $\mathrm{d}\omega=0$,ω 称为恰当的,如果它是一个微分形式的外微分,即存在微分形式 φ 使 $\omega=\mathrm{d}\varphi$.Poincaré 引理说明,一个恰当的微分形式一定是闭的.

例 1.6.1 设 $R^3:(x,y,z)$是笛卡儿坐标.

1. 若 f 是 R^3 上的 C^∞函数,则

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

则其系数构成的向量$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$就是 f 的梯度 $\mathrm{grad}f$.

2. 设

$$\omega = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y + C\mathrm{d}z,$$

其中 A,B 和 C 是 R^3 上的 C^∞函数,则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}A \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}B \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}c \wedge \mathrm{d}z \\ &= \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\ &\quad + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其系数

$$\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z},\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x},\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)$$

则是向量场 $X=(A,B,C)$的旋度 $\mathrm{curl}X$.

3. 设

$$\omega = A\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + C\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

则

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$

其系数就是向量场 $X=(A,B,C)$的旋度 $\mathrm{div}X$.

由 Poincaré 引理立即可得

$$\mathrm{curl}(\mathrm{grad}f) = 0, \quad \mathrm{div}(\mathrm{curl}X) = 0.$$

这就是场论中的两个熟知的公式.

定理 1.6.4 设 $\omega\in F_{r-1}(A),r>1,X_1,\cdots,X_r$ 是 A 的任意的 C^∞的量场,则

$$\mathrm{d}\omega(X_1,\cdots,X_r) = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j+1}X_j\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_r)$$

$$+\frac{1}{r}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j]X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_r),\tag{1.6.2}$$

式中 $\hat{X}_j$ 表示去掉 X_j.

证明 因为 $d\omega$ 是 r 次微分式,所以(1.6.2)的左端作为向量场 $X_1,\cdots,X_r$ 的函数对每一个变元都是 f 线性的. 现在证明,(1.6.2)的右端作为 $X_1,\cdots,X_r$ 的函数对每一个变元也是 f 线性的.将(1.6.2)的右端记作 $G(X_1,\cdots,X_r)$,只须证明对 $k=1,\cdots,r$,

$$\begin{aligned}&G(X_1,\cdots,X_k+X_k',\cdots,X_r)\\&=G(X_1,\cdots,X_k,\cdots,X_r)+G(X_1,\cdots,X_k',\cdots,X_r)\end{aligned}\tag{1.6.3}$$

和

$$G(X_1,\cdots,aX_k,\cdots,X_r)=aG(X_1,\cdots,X_k,\cdots,X_r)\tag{1.6.4}$$

成立,其中 a 是 A 上的任意函数.(1.6.3)成立是显然的,现在证明(1.6.4)成立.对任意固定的 k,

$$\begin{aligned}&rG(X_1,\cdots,aX_k,\cdots,X_r)\\&=\sum_{j>k}(-1)^{j+1}X_j\omega(X_1,\cdots,aX_k,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_r)\\&\quad+\sum_{j<k}(-1)^{j+1}X_j\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,aX_k,\cdots,X_r)\\&\quad+(-1)^{k+1}aX_k\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_r)\\&\quad+\sum_{\substack{i,j\neq k\\ i<j}}\omega([X_i,X_j],\cdots,\hat{X}_i,\cdots,aX_k,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_r)\\&\quad+\sum_{j>k}(-1)^{k+j}\omega([aX_k,X_j],X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_r)\\&\quad+\sum_{i<k}(-1)^{i+k}\omega([aX_i,aX_k],\cdots,X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_r)\\&=\sum_{j>k}(-1)^{j+1}(X_ja)\omega(X_1,\cdots,X_k,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_r)\end{aligned}$$

$$+ a\sum_{j>k}(-1)^{j+1}X_j\omega(X_1,\cdots,X_k,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_r)$$

$$+ \sum_{j<k}(-1)^{j+1}(X_ja)\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_k,\cdots,X_r)$$

$$+ a\sum_{j<k}(-1)^{j+1}X_j\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_k,\cdots,X_r)$$

$$+ (-1)^{k+1}aX_k\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_r)$$

$$+ a\sum_{\substack{i,j\neq k\\ i<j}}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_k,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_r)$$

$$+ \sum_{j>k}(-1)^{k+j+1}(X_ja)\omega(X_k,X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_r)$$

$$+ a\sum_{j>k}(-1)^{k+j}\omega([X_k,X_j],X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_r)$$

$$+ \sum_{i<k}(-1)^{i+k}(X_ia)\omega(X_k,X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_k,\cdots X_r)$$

$$+ a\sum_{i<k}(-1)^{i+k}\omega([X_1,X_k],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_r)$$

$$= a\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}X_j\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_r)$$

$$+ a\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],\cdots,\hat{X}i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_r)$$

$$= raG(X_1,\cdots,X_r),$$

所以,(1.6.2)的右端对每一个变元都是 f 线性的.因此,要证明(1.6.2)成立,只须取 n 个在每一点都线性无关的向量场验证即可.又因为(1.6.2)的两端都是 A 上的函数,只要证明它们在每一点的值相等.故不妨在一个坐标系 $U:(x^i)(i=1,\cdots,n)$中证明.这时,$\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}$在每一点都构成切空间的一组基,只须就

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,X_r=\frac{\partial}{\partial x^{i_r}},\quad 1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n$$

进行验证.由外微分的线性性质,不妨设 ω 是一个单项式

$$\omega = a\mathrm{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_r},$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_r} \\ &= \frac{\partial a}{\partial x^{j_1}}\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \mathrm{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_r},\end{aligned}$$

这时,(1.6.2)的左端为

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right) \\ &= \frac{\partial a}{\partial x^{j_1}}\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \mathrm{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_r}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right) \\ &= \frac{1}{r!}\frac{\partial a}{\partial x^{j_1}}\delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_r},\end{aligned}$$

(1.6.2)的右端为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k+1}X_k\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right) \\ &= \frac{1}{r!}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k+1}\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\left(a\delta^{j_2\cdots j_r}_{i_1\cdots\hat{i}_k\cdots i_r}\right) \\ &= \frac{1}{r!}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k+1}\frac{\partial a}{\partial x^{i_k}}\delta^{j_2\cdots j_r}_{i_1\cdots\hat{i}_k\cdots i_r} \\ &= \frac{1}{r!}\frac{\partial a}{\partial x^{j_1}}\delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_r},\end{aligned}$$

与左端相等.定理证毕.

注意(1.6.2)的右端的第二部分为0,这是因为$\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=0$.

由(1.6.2),当 $r=2$ 时,

$$\mathrm{d}\omega(X,Y)=\frac{1}{2}(X\omega(Y)-Y\omega(X)-\omega([X,Y])), \quad (1.6.5)$$

当 $r=3$ 时,

$$d\omega(X,Y,Z)=\frac{1}{3}(X\omega(Y,Z)+Y\omega(Z,X)+Z\omega(X,Y))$$
$$-\frac{1}{3}(\omega([X,Y],Z)+\omega([Y,Z],X)$$
$$+\omega([Z,X],Y)), \qquad (1.6.6)$$

其中 X,Y 和 Z 是任意的向量场.

(1.6.2)不仅给出了有关外微分运算的一个计算公式,它还反映了微分形式的外微分式运算与向量场的换位子运算之间的联系.

例 1.6.2 设 $U:(x^i)(i=1,\cdots,n)$ 是 n 维微分流形 M 的一个坐标系,$X_1,\cdots,X_k\in V(U)$,在 U 中的每一点都线性无关,$\alpha^{k+1},\cdots,\alpha^n\in F_1(U)$,在 U 中的每一点也都线性无关,且

$$\alpha^r(X_i)=0,\quad i=1,\cdots,k, r=k+1,\cdots,n,$$

则

$$X_1,\cdots,X_k,[X_i,X_j],\quad i,j=1,\cdots,k$$

在 U 中的每一点都是线性相关的必须且只须存在 $\varphi_s^r\in F_1(U)$,$r,s=r+1,\cdots,n$,使

$$d\alpha^r=\varphi_s^r\wedge\alpha^s,\quad r=k+1,\cdots,n.$$

证明 不妨设在 U 中可取 $X_{k+1},\cdots,X_n\in V(U)$,$\alpha^1,\cdots,\alpha^k\in F_1(U)$,使 $X_1,\cdots,X_k,X_{k+1},\cdots,X_n$ 和 $\alpha^1,\cdots,\alpha^k.\alpha^{k+1},\cdots,\alpha^n$ 在 U 中的每一点都是线性无关的.且

$$\alpha^a(X_b)=\delta_b^a,\quad a,b=1,\cdots,n. \qquad (1.6.7)$$

必要性.因为 $\alpha^1,\cdots,\alpha^n$ 在 U 中的每一点都是线性无关的,$d\alpha^r(r=k+1,\cdots,n)$必可表示为

$$d\alpha^r=\varphi_s^r\wedge\alpha^s+C_{lm}^r\alpha^l\wedge\alpha^m,$$

其中 $C_{lm}^r(l,m=1,\cdots,k)$为 U 上的函数,且 $C_{lm}^r+C_{ml}^r=0$. 由(1.6.7),

$$d\alpha^r(X_i,X_j)=C_{ij}^r,\quad r=k+1,\cdots,n;\quad i,j=1,\cdots,k.$$

又由公式(1.6.3),

$$d\alpha^r(X_i,X_j)=\frac{1}{2}(X_i\alpha^r(X_j)-X_j\alpha^r(X_i)-\alpha^r([X_i,X_j]))=0.$$

所以 $C_{ij}^r=0$,即有

$$d\alpha^r=\varphi_s^r\wedge\alpha^s,\quad r=k+1,\cdots,n.$$

充分性.设 $d\alpha^r=\varphi_s^r\wedge\alpha^s,r=k+1,\cdots,n$,则有

$$\begin{aligned}d\alpha^r(X_i,X_j)&=\varphi_s^r\wedge\alpha^s(X_i,X_j)\\&=\frac{1}{2}(\varphi_s^r(X_i)\alpha^s(X_j)-\varphi_s^r(X_j)\alpha^s(X_i))=0.\end{aligned}$$

又由(1.6.3)

$$\begin{aligned}d\alpha^r(X_i,X_j)&=\frac{1}{2}(X_i\alpha^r(X_j)-X_j\alpha^r(X_i)-\alpha^r([X_i,X_j]))\\&=-\frac{1}{2}\alpha^r([X_i,X_j]),\end{aligned}$$

所以

$$\alpha^r([X_i,X_j])=0,\quad r=k+1,\cdots,n,\quad i,j=1,\cdots,k.$$

于是,在 U 的每一点,$[X_i,X_j]$都属于 $X_1,\cdots,X_k$ 所张的子空间,即 $X_1,\cdots,X_k,[X_i,X_j]$在 U 的每一点都是线性相关的.

综上所述,若 M 是一个n 维的微分流形,A 是M 的任意的一个开集,则在 A 上的全体C^∞微分形式的集合

$$F(A)=\sum_{r=0}^{n}F_r(A)$$

中,就定义了线性运算,外积运算和外微分运算,连同上述运算就称为一个 Cartan **微分代数**.它的一个子集合若对线性运、外积运算和外微分运算都是闭封的,则称为它的一个**微分子代微**.若 I 是$F(A)$的一个微分子代数,并且对任意的 $\omega\in F(A)\varphi\in I$,均有

$$\omega\wedge\varphi\in I,$$

则 I 称为$F(A)$的一个**闭理想**.

§7 切 映 射

设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维的微分流形,

$$f: M \to N$$

是一个连续映射，p 是 M 的任一点，$(U,\varphi):(x^i)(i=1,\cdots,m)$是包含 p 的一个坐标系，$(V,\psi):(y^\alpha)(\alpha=1,\cdots,n)$是包含 $f(p)$的一个坐标系. 则由 F 就得到 R^m 中开集 $\varphi(V)$到 R^n 个的开集 $\psi(V)$的映射

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \psi(U) \to \psi(V). \qquad (1.7.1)$$

定义 1.7.1 映射 f 称为在点 p 是 C^∞ 的，如果 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$在 $\varphi(p)$是 C^∞ 的，f 称为 M 到 N 的一个 C^∞ 映射，如果 f 在 M 的每一点都是 C^∞ 的.

显然，此定义与坐标的选取无关. 今后凡讨论微分流形之间的映射都指 C^∞ 映射.

通过坐标，(1.7.1)可以表示为坐标之间的函数关系

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1,\cdots,x^m), \quad \alpha = 1,\cdots,n. \qquad (1.7.2)$$

即 $y^\alpha\circ f = f^\alpha\circ\varphi$ 或简写为 $y^\alpha\circ f = f^\alpha$，显然，映射 f 在 U 上是 C^∞ 的必须且只须所有的 $f^\alpha(\alpha=1,\cdots,n)$都是 C^∞ 的.

设 g 是 N 上任意的一个函数，由映射 f 就自然得到 M 上的一个函数 $g\circ f$，

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad x \in M.$$

显然，若 g 是 N 上的 C^∞ 函数，则 $g\circ f$ 是 M 上的 C^∞ 函数. 这就得到了 $F_0(N)$到 $F_0(M)$的一个映射

$$f^*: F_0(N) \to F_0(M), \qquad (1.7.3)$$

即

$$f^* g = g \circ f, \quad g \in F_0(N).$$

容易证明，对任意的 $g,h\in F_0(N)$，

$$f^*(g+h) = f^*g + f^*h,$$
$$f^*(gh) = (f^*g)(f^*h).$$

设 p 是 M 上的任意一点，g 是定义在 N 的 $f(p)$近旁的一个函数，则 $f^*g = g\circ f$ 是定义在 M 的 p 点近旁的一个函数. 于是，对 p 点的任意一个切向量 $X\in M_p$ 和 $g\in F_{f(p)}$，定义

$$(f_* X)g = X(f^* g) = X(g \circ f),$$

这就得到由 $\widetilde{F}_{f(p)}$ 到实数域 R 的一个映射

$$f_* X : \widetilde{F}_{f(p)} \to R.$$

并且，对任意的 $g, h \in \widetilde{F}_{f(p)}$ 和 $\lambda \in R$，

$$\begin{aligned}(f_* X)(g+h) &= X(g \circ f + h \circ f) \\ &= (f_* X)g + (f_* X)h,\end{aligned}$$

$$(f_* X)(\lambda g) = X(\lambda g \circ f) = \lambda (f_* X) g,$$

$$\begin{aligned}(f_* X)(gh) &= X((g \circ f)(h \circ f)) \\ &= (g \circ f)(p) X(h \circ f) + (h \circ f)(p) X(g \circ f) \\ &= g(f(p))(f_* X)h + h(f(p))(f_* X)g,\end{aligned}$$

所以，$f_* X$ 是 N 的点 $f(p)$ 的切向量，即 $f_* X \in N_{f(p)}$. 因此，f_* 是切空间 M_p 到切空间 $N_{f(p)}$ 的一个映射，即

$$f_* : M_p \to N_{f(p)}.$$

并且容易验证，对任意的 $X, Y \in M_p$，$\lambda \in R$，

$$f_*(X+Y) = f_* X + f_* Y,$$

$$f_*(\lambda X) = \lambda f_* X.$$

即映射 f_* 是线性的.

这就证明，对任意给定的映射 $f: M \to N$，和 M 上的任一点 p，就自然诱导出 p 点的切空间 M_p 到它的像点 $f(p)$ 的切空间 $N_{f(p)}$ 的一个线性映射，称为 f 在 p 点的**切映射**. 这个映射是与 f 和 p 有关的，常记作 $(\mathrm{d}f)_p$ 或 $(f_*)_p$. 在不致引起混淆的情况下又常简记作 f_* 或 f_p.

设 (U, φ)：(x^i) $(i=1,\cdots,m)$ 是 M 上包含 p 点的一个坐标系，(V, ψ)：(y^α) $(\alpha=1,\cdots,n)$ 是 N 上包含 $f(p)$ 一个坐标系，$X_i = \left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ $(i=1,\cdots,m)$ 和 $Y_\alpha = \left(\dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{f(p)}$ $(\alpha=1,\cdots,n)$ 分别为 M_p 和 $N_{f(p)}$ 的自然基，于是，

$$f_* X_i = ((f_* X_i) y^\alpha) Y_\alpha = X_i (f^* y^\alpha) Y_\alpha$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (y^\alpha \circ f) Y_\alpha = \left(\frac{\partial y^\alpha \circ f \circ \varphi^{-1}}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)} Y_\alpha$$

$$= \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)} Y_\alpha. \tag{1.7.4}$$

可见,映射 f 在点 p 的切映射 f_* 用自然基表示的系数矩阵就是 f 的坐标表示(1.7.2)在 $\varphi(p)$ 的 Jacobi $\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)}$,也常简记为 $\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\right)_p$.

f_* 作为向量空间到向量空间的线性映射自然有它的对偶映射 f^*,它是由 $N_{f(p)}$ 的对偶空间 $N^*_{f(p)}$ 到 M_p 的对偶空间 M^*_p 的一个线性映射

$$f^*: N^*_{f(p)} \to M^*_p,$$

即对任意的 $\omega \in N^*_{f(p)}$, $X \in M_p$,

$$(f^*\omega)(X) = \omega(f_* X),$$

f^* 称为 f 在 $f(p)$ 的**微映射**,也常记作 $(df)^*_{f(p)}$, $f^*_{f(p)}$, f^* 也常称为**回退**.

由(1.7.4)立即可得 f^* 的坐标表示:

$$f^*(\mathrm{d}y^\alpha)_{f(p)} = \left(\frac{\partial f^*}{\partial x^i}\right)_p (\mathrm{d}x^i)_p, \quad \alpha = 1, \cdots, n.$$

由于映射 f 的切映射 f_* 在 M 的每一点 p 定义,自然可以在整个流形上考虑,并仍记作 f_*,设 X 是 M 上的一个任意的向量,自然可以定义 $f_* X$:

$$(f_* X)_{f(p)} = (f_*)_p X_p, \quad p \in M.$$

问题是 $f_* X$ 未必是 N 上的向量场.

同样的,若 ω 是 N 上的一个任意的一次微分形式,自然也可以定义 $f^*\omega$:

$$(f^*\omega)_p = f^*\omega_{f(p)}, \quad p \in M.$$

注意,上式左端的 f^* 与右端的 f^* 意义不同,右端是在 $f(p)$ 点

的，即应为 $f^*_{f(p)}$. 但是，我们这样简写并不致引起混淆.

$f^*\omega$ 是在 M 上的每一点定义的，并且，由

$$(f^*\omega)_p(X)=\omega_{f(p)}(f_*X),\quad p\in M, X\in M_p.$$

立即可得

$$\begin{aligned}(f^*\omega)_p(\lambda X+\mu Y)&=\omega_{f(p)}(\lambda f_*X+\mu f_*Y)\\&=\lambda\omega_{f(p)}(f_*X)+\mu\omega_{f(p)}(f_*Y)\\&=\lambda(f^*\omega)_p(X)+\mu(f^*\omega)_p(Y),\end{aligned}$$

对任意的 $\lambda,\mu\in R$, $X,Y\in M_p$ 和 M 上的任一点 p 成立. 所以，$f^*\omega$ 是 M 上的一个一次微分形式，即 f^* 是映射

$$f^*: F_1(N)\to F_1(M). \tag{1.7.5}$$

一般的，若 ω 是 N 上的 $r(\geqslant 1)$ 次微分形式，也可以类似地定义 $f^*\omega$：

$$(f^*\omega)_p(X_1,\cdots,X_r)=\omega_{f(p)}(f_*X_1,\cdots,f_*X_r),$$

其中 $X_1,\cdots,X_r$ 是 M_p 中的任意的切向量. 容易证明，$f^*\omega$ 是 M 上的 r 次微分形式，即有

$$f^*: F_r(N)\to F_r(M),\quad r=0,1,\cdots,n.$$

当 $r=0$ 和 1 时，它就是(1.7.3)和(1.7.5)所表示的映射.

设 $\omega,\varphi\in F_r(N)$, $\lambda\in R$，则有

$$\begin{aligned}&(f^*(\omega+\varphi))_p(X_1,\cdots,X_r)\\&=(\omega+\varphi)_{f(p)}(f_*X_1,\cdots,f_*X_r)\\&=\omega_{f(p)}(f_*X_1,\cdots,f_*X_r)+\varphi_{f(p)}(f_*X_1,\cdots,f_*X_r)\\&=(f^*\omega)_p(X_1,\cdots,X_r)+(f^*\varphi)_p(X_1,\cdots,X_r)\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&(f^*(\lambda\omega))_p(X_1,\cdots,X_r)\\&=\lambda\omega_{f(p)}(f_*X_1,\cdots,f_*X_r)\\&=\lambda(f^*\omega)_p(X_1,\cdots,X_r),\end{aligned}$$

对 M 上的任一点 p 和 M_p 的任意切向量 $X_1,\cdots,X_r$ 成立。所以，

$$f^*(\omega+\varphi)=f^*\omega+f^*\varphi,$$

$$f^*(\lambda\omega) = \lambda f^*\omega,$$

即 f^* 保持线性运算.

f^* 还保持外积运算,即若 $\omega,\varphi \in F(N)$,则

$$f^*(\omega \wedge \varphi) = f^*\omega \wedge f^*\varphi.$$

这是因为,若 ω 和 φ 分别为 r 和 s 次的微分式,则对任意一点 $p \in M$ 和 $X_1,\cdots,X_{r+s} \in M_p$,

$$(f^*(\omega \wedge \varphi))_p(X_1,\cdots,X_{r+s}) = (\omega \wedge \varphi)_{f(p)}(f_*X_1,\cdots,f_*X_{r+s})$$

$$= \frac{1}{(r+s)!}\delta^{i_1\cdots i_{r+s}}_{1\cdots r+s}\omega_{f(p)}(f_*X_{i_1},\cdots,f_*X_{i_r})$$

$$\cdot \varphi_{f(p)}(f_*X_{i_{r+1}},\cdots,f_*X_{i_{r+s}})$$

$$= \frac{1}{(r+s)!}\delta^{i_1\cdots i_{r+s}}_{1\cdots r+s}(f^*\omega)_p(X_{i_1},\cdots,X_{i_r})(f^*\varphi)_p(X_{i_{r+1}},\cdots,X_{i_{r+s}})$$

$$= (f^*\omega \wedge f^*\varphi)_p(X_1,\cdots,X_{r+s}).$$

进一步还可以证明,f^* 保持外微分运算 d.

定理 1.7.1 设 M 和 N 分别 m 维和 n 维的微分流形

$$f: M \to N$$

是一个 C^∞ 映射,则

$$f^* \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ f^*. \tag{1.7.6}$$

其中 d 表示外微分运算.

证明 只要证明,对任意的 $\omega \in F_r(N)(r=0,1,\cdots,n)$,

$$\mathrm{d}(f^*\omega) = f^*\mathrm{d}\omega$$

在 N 的每一点成立.因此,只须在 N 的一个坐标系 V: $(y^\alpha)(\alpha = 1,\cdots,n)$ 中证明.

若 $\omega = g \in F_0(N)$,则 $f^*g \in F_0(M)$,且

$$(\mathrm{d}(f^*g))_p(X) = X(f^*g) = f(f_*X)g$$

$$= (\mathrm{d}g)_{f(p)}(f_*X) = (f^*\mathrm{d}g)_p(X),$$

其中 p 是 M 的任一点,X 是 M_p 中的任一向量,所以

$$\mathrm{d}(f^*g) = f^*\mathrm{d}g.$$

若 ω 是一个任意的 r 次微分形式,即 $\omega \in F_r(N)$,则 ω 可表

示为

$$\omega = a_{\alpha_1\cdots\alpha_r}\mathrm{d}y^{\alpha_1} \wedge \alpha\mathrm{d}y^{\alpha_r}.$$

于是

$$\begin{aligned} f^*\omega &= f^*a_{\alpha_1\cdots\alpha_r}(f^*\mathrm{d}y^{\alpha_1}) \wedge \cdots \wedge (f^*\mathrm{d}y^{\alpha_r}) \\ &= f^*a_{\alpha_1\cdots\alpha_r}(\mathrm{d}f^*y^{\alpha_1}) \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}f^*y^{\alpha_r}), \\ \mathrm{d}(f^*\omega) &= (\mathrm{d}f^*a_{\alpha_1\cdots\alpha_r}) \wedge (\mathrm{d}f^*y^{\alpha_1}) \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}f^*y^{\alpha_r}) \\ &= f^*(\mathrm{d}a_{\alpha_1\cdots\alpha_r}) \wedge (f^*\mathrm{d}y^{\alpha_1}) \wedge \cdots \wedge (f^*\mathrm{d}y^{\alpha_r}) \\ &= f^*(\mathrm{d}a_{\alpha_1\cdots\alpha_r} \wedge \mathrm{d}y^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{\alpha_r}) \\ &= f^*(\mathrm{d}\omega). \end{aligned}$$

定理证毕.

总之,由微分流形 M 到微分流形 N 的一个 C^∞映射 f,自然诱导出 N 的 Cartan 微分代数 $F(N)$ 到 M 的 Cartan 微分代数 $F(M)$的一个映射

$$f^* : F(N) \to F(M).$$

且 f^* 保持线性运算,外积运算和外微分运算,也简称为**微分同态**.

定理 1.7.2 设 L,M 和 N 都是微分流形,

$$f : L \to M, \quad \bar{f} : M \to N$$

都是 C^∞映射,p 是 L 上任意一点,则

$$\bar{f} \circ f : L \to N$$

是 C^∞映射,且

$$((\bar{f} \circ f)_*)_p = (\bar{f}_*)_{f(p)} \circ (f_*)_p, \tag{1.7.7}$$

$$(\bar{f} \circ f)^*_{\bar{f}(f(p))} = f^*_{f(p)} \circ \bar{f}^*_{\bar{f}(f(p))}. \tag{1.7.8}$$

(1.7.7)和(1.7.8)也常简写为

$$(\bar{f} \circ f)_* = \bar{f}_* \circ f_*,$$

$$(\bar{f} \circ f)^* = f^* \circ \bar{f}^*.$$

通常并不会引起混淆.

证明 $\bar{f}\circ f$ 显然为一 C^∞ 映射.

对任意的 $g\in F_0(N)$,

$$(\bar{f}\circ f)^* g=(g\circ\bar{f})\circ f=f^*(g\circ\bar{f})$$
$$=f^*(\bar{f}^* g)=(f^*\circ\bar{f}^*)g.$$

假设 X 是 L_p 中的任一切向量,则

$$((\bar{f}\circ f)_* X)g=X((\bar{f}\circ f)^* g)=X(f^*(\bar{f}^* g))$$
$$=(f_* X)(\bar{f}^* g)=(\bar{f}_*(f_* X))g,$$

即有

$$(\bar{f}\circ\bar{f})_* X=\bar{f}_*\circ f_* X,\quad X\in L_p,$$

所以

$$(\bar{f}\circ f)_*=\bar{f}_*\circ f_*.$$

若 $\omega\in F_1(N),X\in L_p$,则

$$((\bar{f}\circ f)^*\omega)_p(X)=\omega_{\bar{f}(f(p))}(\bar{f}_*\circ f_* X)$$
$$=(\bar{f}^*\omega)_{f(p)}(f_* X)=(f^*\circ\bar{f}^*\omega)_p(X),$$

即有

$$(\bar{f}\circ f)^*\omega=f^*\circ\bar{f}^*\omega,\quad \omega\in F_1(N).$$

同样的,对任意的 $\omega\in F_r(N)(r>1)$,上式也成立.所以

$$(\bar{f}\circ f)^*=f^*\circ\bar{f}^*.$$

定理证毕.

定义 1.7.2 若 M 和 N 是微分流形,映射

$$f: M\to N$$

称为一个**微分同胚**,如果 f 是一一在上的,且 f 和它的逆 f^{-1} 都是 C^∞ 的,并称 M 和 N 是微分同胚的微分流形.

显然,微分同胚的微分流形必有相同的维数.

若 $f:M\to N$ 是微分同胚,则 $f^{-1}\circ f$ 和 $f\circ f^{-1}$ 分别为 M 和 N 上的恒同映射,由定理 1.7.2,对 M 上的任一点 P,

$$f_*: M_p\to N_{f(p)}$$

是可逆的线性映射,并且

$$f_*^{-1}=(f^{-1})_*.$$

若 X 和 Y 是 M 上任意两个 C^∞ 向量场，经微分同胚 f，f_*X 和 f_*Y 也是 N 上的 C^∞ 向量场. 因此，f_* 是 M 上的全体向量场的集合 $V(M)$ 到 N 上的全体向量场的集合 $V(N)$ 上的一个映射

$$f_*: V(M) \to V(N),$$

因为 f 是一一在上的，以及 f_* 和 f_*^{-1} 在每一点都可逆的线性映射，所以，上述 f_* 是一个可逆的线性映射. 并且，对 N 上的任意函数 $g \in F_0(N)$，

$$\begin{aligned}(f_*[X,Y])g &= [X,Y](f^*g) = X(Y(g\circ f)) - Y(X(g\circ f)) \\ &= X(((f_*Y)g)\circ f) - Y(((f_*X)g)\circ f) \\ &= f_*X((f_*Y)g) - f_*Y((f_*X)g) \\ &= [f_*X, f_*Y]g,\end{aligned}$$

于是

$$f_*[X,Y] = [f_*X, f_*Y],$$

即 f_* 保持换位运算，所以，f_* 是 M 上的向量场李代数 $V(M)$ 到 N 上的向量场李代数 $V(N)$ 的一个李代数同构. 这时，微分同态 $f^*: F(N) \to F(M)$ 也是可逆的，并称之为**微分同构**.

若 M 和 N 都是 n 维的微分流形，$f: M \to N$ 是一个 C^∞ 映射，p 是 M 上的一点，且 $(f_*)_p$ 是可逆的，由反函数存在定理，必有 p 点的邻域 $U(\subset M)$ 和 $f(p)$ 的邻域 $V(\subset N)$，使

$$f: U \to V$$

是微分同胚. 这就说明，f_* 在一点可逆的就保证了流形在这一点近旁是微分同胚的. 但是，整体地说李并不对，即使 f_* 在每一点都是可逆的. 例如，在 R^2 中取定笛卡儿坐标 (x,y)，则以原点为中心的单位圆 S 可以表示为

$$(x,y) = (\cos t, \sin t), \quad t \in R.$$

这就得到映射

$$f: R \to S(\subset R^2),$$

其切映射 f_* 使

$$f_* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = -\sin t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{f(t)} + \cos t\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{f(t)}$$

恒不为零,但 f 不是微分同胚.

§8 积流形、向量丛

设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维的微分流形,$\{(U_i,\varphi_i)\}$ 和 $\{(V_\alpha,\psi_\alpha)\}$ 分别为 M 和 N 的坐标集,M 和 N 作为拓扑空间自然有拓扑积 $M\times N$,它仍然是一个拓扑空间,并且 $\{(U_i\times V_\alpha)\}$ 构成它的一个开覆盖.若 $x\in U_i, y\in V_\alpha$,命

$$(\varphi_i\otimes\psi_\alpha)(x,y)=\varphi_i(X),\quad \psi_\alpha(y)\in R^m\times R^n,$$

这就得到了 $U_i\times V_\alpha$ 到 $m+n$ 维欧氏空间 R^{m+n} 的一个同胚

$$\varphi_i\otimes\psi_\alpha: U_i\times V_\alpha\to R^{m+n},$$

于是

$$\{U_i\times V_\alpha,\ \varphi_i\otimes\psi_\alpha\}$$

就是 $M\times N$ 上的一个坐标集,并且坐标变换是 C^∞ 的,这样就决定了 $M\times N$ 上的一个微分结构,使 $M\times N$ 成为一个 $m+n$ 维的微分流形,称为 M 和 N 的**积流形**,仍记作 $M\times N$.例如,n 维环面 T^n(1.3.4)自然可看作 n 个一维微分流形圆周 T^1 的乘积流形,

$$T^n=\overbrace{T^1\times\cdots\times T^1}^{n\text{个}}.$$

设 p 和 q 分别为 M 和 N 上的任意一点,$U:(x^i)(i=1,\cdots,m)$ 是 M 上包含 p 的一个坐标系,$V_\alpha:(y^\alpha)(\alpha=1,\cdots,n)$ 是 N 上包含 q 的一个坐标系,则 $U_i\times V_\alpha:(x^i,y^\alpha)$ 就是 $M\times N$ 上包含 (p,q) 的一个坐标系.因此,$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(p,q)}$ 和 $\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{(p,q)}$ $(i=1,\cdots,m,\alpha=1,\cdots,n)$ 就构成 $M\times N$ 在 (p,q) 的切空间 $(M\times N)_{(p,q)}$ 的一组基.可见,$M\times N$ 在 (p,q) 的切空间就是 M 在 p 的切空间和 N 在 q 的切空间的直和,即

$$(M\times N)_{(p,q)}=M_p\dotplus N_q.$$

设 (p,q) 是 $M\times N$ 上任意一点,自然地由

$$\pi(p,q)=p(\text{或 } q)$$

就得到 $M\times N$ 到 M(或 N)的一个映射

$$\pi:\ M\times N\to M(\text{或 } N),$$

称为 $M\times N$ 到 M(或 N)的**投影**.

发展积流形的概念就能得到所谓**纤维丛**的概念.纤维丛的一个基本特点是它在局部是积流形.问题是如何将这些局部积粘合起来.一个典型的例子就是**切丛**.

设 M 是 n 维微分流形,$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 是它的一个 C^∞ 坐标集.这时

$$\varphi_\alpha:\ U_\alpha\to\varphi(U_\alpha)(\subset R^n)$$

为同胚.现在考虑 M 上全体切向量的集合

$$T(M)=\bigcup_{p\in M}M_p,$$

并在 $T(M)$上引进微分结构.

设 $p\in U_\alpha:(x^i)$,则 M_p 有自然基 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$,在 U_α 上有自然标架场 $\frac{\partial}{\partial x^i}(i=1,\cdots,n)$.于是,$U_\alpha$ 中任意一点 p 的一个切向量 $v\in M_p$ 就可以用坐标表示为

$$(x^i,v^i),\quad i=1,\cdots,n.$$

其中 x^i 是 p 在 φ_α 中的坐标,v^i 是 v 在自然基 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ 中的坐标.显然

$$\bigcup_{p\in U_\alpha}M_p=U_\alpha\times R^n$$

为笛卡儿积,并记作 V_α,并且,φ_α 可自然扩充为 $U_\alpha\times R^n$ 到 $R^n\times R^n$ 的一个映射,仍记作 φ_α,即有同胚

$$\varphi_\alpha:\ V_\alpha\to\varphi(U_\alpha)\times R^n(\subset R^{2n}).$$

这就得到了 $T(M)$的一个坐标覆盖$\{(V_\alpha,\varphi_\alpha)\}$.若 $V_\alpha\cap V_\beta\neq\varnothing$,则其中的点$(p,v)$就有不同的坐标$(x^i,\ v^i)$和$(x^{i'},v^{i'})(i=1,\cdots,n)$,其坐标变换关系

$$x^{i'}=x^{i'}(x^1,\cdots,x^n),\quad i=1,\cdots,n,$$

$$v^{i'} = v^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad i = 1, \cdots, n,$$

都是 C^∞ 的. 所以, $\{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 是 $T(M)$ 上的一个 C^∞ 坐标集, 它决定了 $T(M)$ 上的一个微分结构, 使 $T(M)$ 成为一个 $2n$ 维微分流形, 称为 M 的**切丛**.

由以上的讨论可见, M 的切丛 $T(M)$ 的微分结构是由 M 的微分结构确定的, 其局部为积流形, 由这些乘积给出了 $T(M)$ 的一个坐标覆盖. 并且, 由 M 中的坐标变换诱导出切空间中切向量的坐标变换. 这就使得粘合 M 的不同坐标域的同时将在各点相应的切空间也粘合起来, 从而使 $T(M)$ 成为一个 $2n$ 维微分流形.

由于切空间上的张量的坐标变换是由切空间上向量的坐标变换决定的. 类似地就可以定义流形 M 上的 (r,s) 阶张量丛 $T^{r,s}(M)(r,s\geqslant 0)$. 特别, M 的一阶协变张量丛 $T^{(0,1)}(M)$ 即余切向量丛称为 M 的**余切丛**, 记作 $T^*(M)$.

须注意, 切丛 $T(M)$ 在整体上一般不是积流形 $M\times R^n$. 因为, 若不然, 即 $T(M)=M\times R^n$, 则对任意取定的非零的 $a\in R^n$, 由

$$p \to (p, a) \in M \times R^n, \ p \in M$$

确定

$$M \to M \times R^n$$

的一个连续映射, 这是 M 上的一个处处不为零的向量场, 则必有 M 的示性数等于零.

微分流形 M 的切丛 $T(M)$ 可以概括有下述三个特点:

1. 由 $T(M)$ 到 M 有一个投影映射

$$\pi: T(M) \to M,$$

使 $\pi(p,v)=p$, $(p,v)\in T(M)$, 这是一个 C^∞ 的在上的映射, 并且, $T(M)$ 局部为笛卡儿积, 即

$$\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times R^n$$

为同胚, 其中 $\{U_\alpha\}$ 为 M 的一个 C^∞ 坐标覆盖.

2. 对任一点 $p\in U_\alpha$, 定义

$$\varphi_{\alpha,p}(v) = \varphi_\alpha(p,v), \qquad v \in M_p$$

得到映射

$$\varphi_{\alpha,p}:\ \pi^{-1}p \to R^n$$

为一同胚. $\pi^{-1}p = M_p$ 称为切丛 $T(M)$ 在 p 点的纤维. 并且, 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时, 对任一点 $p \in V_\alpha \cap V_\beta$ 有

$$g_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta,p} \circ \varphi_{\alpha,p}^{-1}: \qquad R^n \to R^n$$

这一线性自同构.

3. 由 2 可知, $g_{\alpha\beta}$ 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 中任一点 p 定义, 于是得到 C^∞ 映射

$$g_{\alpha\beta}: \quad U_\alpha \cap U_\beta \to GL(R^n),$$

即 $g_{\alpha\beta}(p) \in GL(R^n)$, $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. 其中 $GL(R^n)$ 是 R^n 上全体线性自同构所成的群, 即 n 阶一般线性群 $G(n,R)$.

将上述有关切丛的概念抽象并推广, 将 R^n 换成任意的 q 维向量空间 R^q, 就得到向量丛的概念.

定义 1.8.1 设 E, M 为微分流形, $\pi: E \to M$ 为在上的 C^∞ 映射, $V = R^q$ 为 q 维向量空间, 并给定 M 的一个覆盖 $\{U_\alpha\}$, 以及一组映射 φ_α, 满足下列条件:

1. $$\varphi_\alpha:\ \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times R^q$$

为微分同胚, 且对任意的 $p \in U_\alpha$, $v \in R^q$,

$$\pi(p,v) = p.$$

2. 对任一点 $p \in U_\alpha$, 命

$$\varphi_{\alpha,p}(v) = \varphi_\alpha(p,v), \quad v \in R^q,$$

即有映射

$$\varphi_{\alpha,p}:\ \pi^{-1}p \to R^q, \quad p \in M.$$

为同胚, 并且, 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时, 对 $U_\alpha \cap U_\beta$ 中任一点 p, 映射

$$g_{\alpha\beta}(p) = \varphi_{\beta,p}\varphi_{\alpha,p}^{-1}:\ R^q \to R^q$$

为线性自同构.

3. 定义在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上的 $g_{\alpha\beta}$ 使

$$g_{\alpha\beta}: \quad U_\alpha \cap U_\beta \to GL(V)$$

为一 C^∞ 映射.

则(E,M,π)称为 M 上的一个 q 维**向量丛**,E 称为**丛空间**,M 称为**底空间**,π 称为**丛投影**,V 称为**纤维型**,$\pi^{-1}p$ 称为在 p 点的**纤维**.

由于 $\varphi_{\alpha,p}:\pi^{-1}p\to R^q$ 为同胚,可将纤维型 R^q 上的线性结构搬到纤维 $\pi^{-1}p$ 上,使 $\pi_p^{-1}=E_p$ 为一向量空间.由条件 2,这个线性结构不依赖于坐标的选取.因此,向量丛 E 可以看作是由积流形 $U_\alpha\times R^q$ 沿着同一点 p 的纤维粘合起来的,在粘合时要求保持纤维上的线性结构.

显然,前面所讨论的切丛、张量丛都是向量丛,特别,$M\times R^q=E$ 也是 M 上的向量丛,称为 M 上的**平凡的向量丛**或**积丛**.

定义 1.8.2 C^∞ 映射

$$\sigma:\ M\to E$$

称为(E,M,π)的一个**截面**,如果 $\pi\circ\sigma$ 是 M 上的恒同映射,即

$$\pi\circ\sigma=I_M.$$

于是,M 上的一个向量场就是其切丛 $T(M)$的一个截面,张量场则是张量丛的截面.

进一步发展向量丛的概念,将纤维型 V 换成一般的微分流形 F,作用于 V 的线性群 $GL(V)$换成作用于 F 的变换群,就能得到一般的**纤维丛**的概念.

§9 子 流 形

设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维的微分流形.

定义 1.9.1 C^∞ 映射 $f:N\to M$ 称为**浸入**,如果其切映射 f_* 在每一点都是不退化的.这时,(f,N)称为 M 的一个**浸入子流形**.

如果 f 且是单一的,则 f 称为一个**嵌入**,(f,N)称为 M 的一个**嵌入子流形**.

由定义可知,必有 $n\leqslant m$.

例 1.9.1 设 A 是微分流形 M 的一个开子集，则 M 的微分结构限制在 A 上就得到 A 的一个微分结构，使 A 成为一个 m 维的微分流形. 于是，恒同映射

$$i: A \to M \tag{1.9.1}$$

是一个嵌入，即(i, A)为 M 的一个子流形，称为 M 的一个开子流形.

例 1.9.2 设 R 是实数轴，

$$x: R \to M \tag{1.9.2}$$

为一 C^∞ 映射，且 x_* 恒不为零，则(x, R)是 M 的一个一维浸入子流形，并称为**曲线**.

设 U: $(x^i)(i=1,\cdots,m)$是 M 的一个坐标系，$t \in R$，则映射(1.9.2)在 U 中可以用坐标表示为

$$x^i = x^i(t), \quad i = 1, \cdots, n.$$

这就是通常的**参数方程**，t 称为**参数**，其切映射则表示为

$$x_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_t = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x(t)},$$

或简写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

x_* 不退化，即$\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t}\right)$恒不为零. 这就保证了曲线在每一点的切向存在.

今后，如不特别声明，提到的子流形都是浸入子流形.

例 1.9.3 设 f 是 n 维微分流形上的一个 C^∞ 的实值函数，即 C^∞ 映射

$$f: M \to R,$$
$$N = \{p \in M \mid f(p) = 0\},$$

且 $\mathrm{d}f$ 在 N 的每一点都不等于零，若 p 是 N 上的任意一点，U: (x^i) $(i=1,\cdots,n)$是 M 的包含 p 的一个坐标系，则 f 在 U 中可以表示为 C^∞ 函数 $f(x^1,\cdots,x^n)$. 坐标为$(x^1,\cdots,x^n)$的一点在 N

上必须且只须 $f(x^1,\cdots,x^n)=0$. 由假设 $(df)_p\neq 0$，可不妨设 $\left(\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)_p\neq 0$，于是由隐函数存在定理，必有 p 的邻域 $V\subset M$，存在 C^∞ 解

$$x^n = g(x^1,\cdots,x^{n-1}),$$

使 $f(x^1,\cdots,x^{n-1},g(x^1,\cdots,x^{n-1}))\equiv 0$，即有

$$(x^1,\cdots,x^{n-1},g(x^1,\cdots,x^{n-1}))\in N\cap U.$$

这样就得到 C^∞ 微分同胚

$$h:\quad W\to N\cap V,$$

使

$$(x^1,\cdots,x^{n-1})\to(x^1,\cdots,x^{n-1},g(x^1,\cdots,x^{n-1})).$$

其中 W 是 R^{n-1} 的一个开集，如此就给出 N 的一个 $n-1$ 维 C^∞ 坐标集，使 N 成为 M 的一个 $n-1$ 维子流形.

一个 n 维微分流形的 $n-1$ 维子流形通常也称为**超曲面**.

一般的，设 $f_1,\cdots,f_r$ 是 M 上的 r 个 C^∞ 实值函数，

$$N = \{p\in M \mid f_s(p)=0, s=1,\cdots,r\},$$

且 $df_1,\cdots,df_r$ 在 N 的每一点都是线性无关的，则类似以上的讨论，可给 N 一个微分结构，使 N 成为 $n-r$ 维的子流形.

设 (f,N) 是 m 维微分流形 M 的一个 n 维子流形，p 是 N 上的任意一点，$V:(u^\alpha)(\alpha=1,\cdots,n)$ 是 N 上包含 p 的一个坐标系，$U:(x^i)(i=1,\cdots,m)$ 是 M 上包含 $f(p)$ 的一个坐标系，并不妨设 $f(V)\subset U$. 于是，映射 f 就可以通过坐标表示为

$$x^i = f^i(u^1,\cdots,u^n),\ i=1,\cdots,m. \qquad (1.9.3)$$

由子流形的定义，(1.9.3)的 Jacobi 矩阵

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right)_{m\times n},\ i=1,\cdots,m, \alpha=1,\cdots,n$$

的秩为 n，故不妨设在 p 点

$$\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(u^1,\cdots,u^n)}\neq 0,$$

由反函数存在定理，从(1.9.3)的前 n 个等式在 p 点近旁可惟一

地解出

$$u^\alpha = u^\alpha(x^1,\cdots,x^n), \quad \alpha = 1,\cdots,n.$$

于是,在子流形的 N 点近旁,就可以将 $(x^\alpha)(\alpha=1,\cdots,n)$ 选作坐标,这时,子流形 N 就可以局部地表示为、

$$x^a = g^a(x^1,\cdots,x^n), \quad a = n+1,\cdots,m.$$

进一步,令

$$y^\alpha = x^\alpha, \qquad \alpha = 1,\cdots,n.$$

$$y^a = x^a - g^a(x^1,\cdots,x^n), \quad a = n+1,\cdots,m.$$

显然,这是一个允许的坐标变换,经此坐标变换,在 $(y^i)(i=1,\cdots,n)$ 坐标系中,子流形 N 可局部地表示为方程

$$y^a = 0, \quad a = n+1,\cdots,n;$$

即 $f(y^1,\cdots,y^n)=(y^1,\cdots,y^n,0,\cdots,0)$.

设 (f,N) 是 M 的子流形,$f(N)$ 作为 M 的子集有它的诱导拓扑,须注意,这个诱导拓扑与 N 原有的拓扑未必一致.例如,平面上一条自相交的曲线.

定义 1.9.2 设 $f(N)$ 是 M 的一个子流形,且 $f: N\to f(N)$ $(\subset M)$ 为同胚,则称 (φ,N) 为 M 的**正则子流形**,或称 f 是 N 在 M 的一个**正则嵌入**.

由定义,对正则子流形 (f,N),$f(N)$ 在 M 中的诱导拓扑与 N 原有的拓扑一致.

嵌入子流形未必是正则子流形.

例 1.9.4 环面 $T^2=T^1\times T^1$ 可以看作是平面 R^2 上一个单位正方形将两组对边分别粘合起来而成的二维流形,它的点可以用 (x,y) 表示,其中 x 和 y 都是 mod 1 的实数.设

$$\varphi: R \to T^2$$

使

$$\varphi(t) = (t \bmod 1,\ at \bmod 1),$$

其中 α 为一无理数,这就得到环面 T^2 上的一条曲线.直观上,将 T^2 看成是由平而上的正方块覆盖面成时,$\varphi(t)$ 就是直线 $y=\alpha x$ 在环面上所形成的曲线.显然,(φ,R) 是 T^2 的一个嵌入子流形,

但不是正则子流形，因为 $\varphi(R)$在 T^2 中稠密的.

以下讨论向量场的积分曲线.

设 X 是 m 维微分流形 M 上的一个 C^∞ 向量场，流形 M 上的一点 q 称为向量场 X 的**正常点**，如果 X 在 q 的值 X_q 是非零的，否则就称为**奇点**. 显然，如果一点是正常的，则它的附近的点都是正常的. 由于以下讨论的范围都在正常点近旁，故不妨假设 X 在每一点都是正常的，或简称 X 是正常的.

定义 1.9.3 微分流形 M 上的一条曲线

$$x: R \to M$$

称为向量场 $X(\in V(M))$的**积分曲线**，如果在曲线上任一点 x 的切向量就是 X 在点 x 的值.

设 $U:(x^i)(i=1,\cdots,m)$是 M 的一个坐标系，则一条曲线可以用坐标表示为

$$x^i = x^i(t), \quad t \in R, i = 1,\cdots,m.$$

这时，向量场 X 可以表示为

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

其中 X^i 是C^∞函数 $X^i(x^1,\cdots,x^m)(i=1,\cdots,m)$. 于是，曲线 $x^i = x^i(t)(i=1,\cdots,m)$是向量场 X 的积分曲线必须且只须

$$x_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = X,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = X^i(x^1,\cdots,x^m), \quad i = 1,\cdots,m. \tag{1.9.4}$$

因此，求向量场 X 的积分曲线的问题就归结为求解常微分方程组(1.9.4). 由常微分方程的存在惟一性定理，对任意给定的初始值 $(x_0^i)\in U:(i=1,\cdots,m)$，在$(x_0^i)$近旁有(1.9.4)的惟一的解

$$x^i = x^i(t), \quad i = 1,\cdots,m, \tag{1.9.5}$$

使 $x_0^i = x^i(t_0)$，这就是说，给定流形上的任意一点，在这一点近旁，经过这一点的积分曲线惟一存在.

因为 X 是非零的,不妨设 $X^1 \neq 0$,即

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} \neq 0.$$

则由反函数存在定理,(1.9.5)中的方程 $x^1 = x^1(t)$ 的反函数 $t = t(x^1)$ 存在.于是积分曲线可取 x^1 为它的参数,即可表示为

$$x^\alpha = \varphi^\alpha(x^1), \quad \alpha = 2, \cdots, m,$$

并且

$$\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}x^1} = \frac{X^\alpha}{X^1}.$$

于是,若在坐标域 U 中取定超曲面 $x^1 = 0$,经过 $x^1 = 0$ 上任意一点 $(0, v^2, \cdots, v^m)$ 有惟一的一条积分曲线

$$x^\alpha = \varphi^\alpha(x^1, v^2, \cdots, v^m), \quad \alpha = 2, \cdots, m, \tag{1.9.6}$$

使

$$v^\alpha = \varphi^\alpha(0, v^2, \cdots, v^m), \quad \alpha = 2, \cdots, m. \tag{1.9.7}$$

命

$$\begin{cases} x^1 = v^1, \\ x^\alpha = \varphi^\alpha(v^1, \cdots, v^m), \end{cases} \tag{1.9.8}$$

由(1.9.7),当 $x^1 = 0$ 时,(1.9.8)的函数行列式

$$\left.\frac{\partial(x^1, \cdots, x^m)}{\partial(v^1, \cdots, v^m)}\right|_{v^1 = 0} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

故在 $x^1 = 0$ 近旁,可经变换(1.9.8)使 $(v^i)(i = 1, \cdots, m)$ 为新的坐标.在坐标系 (v^i) 中,

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + X^1 \frac{X^\alpha}{X^1} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

$$= X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + X^1 \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial v^1} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = X^1 \frac{\partial x^i}{\partial v^1} \frac{\partial}{\partial x^i} = X^1 \frac{\partial}{\partial v^1}.$$

再经坐标变换

$$\begin{cases} y^1 = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}v^1}{X^1}, \\ y^\alpha = v^\alpha, \quad \alpha = 2, \cdots, m, \end{cases}$$

则

$$X = X^1 \frac{\partial}{\partial v^1} = \frac{\partial}{\partial y^1}.$$

这就说明,若在流形上任意给定一个向量场 X,则在任一正常点近旁,总可以经过适当的坐标变换使 X 属于自然标架场,即为某一族坐标曲线的切向量.

以上过程可以进一步解释如下,由(1.9.7)和(1.9.8)的第二式,当 $x^1=0$ 时

$$\left.\frac{\partial(x^2,\cdots,x^m)}{\partial(v^2,\cdots,v^m)}\right|_{x^1=0} = 1,$$

于是,在 $x^1=0$ 近旁,由

$$x^\alpha = \varphi^\alpha(x^1,v^2,\cdots,v^m), \quad \alpha = 2,\cdots,m,$$

惟一确定其反函数

$$v^\alpha = F^\alpha(x^1,x^2,\cdots,x^m), \quad \alpha = 2,\cdots,m.$$

当取定超曲面 $x^1=0$ 上任意一点,即 v^α 为取定的任意常数 C^α $(\alpha=2,\cdots,m)$时,则确定向量场 X 过该点的惟一的积分曲线,它被表示为

$$F^\alpha(x^1,x^2,\cdots,x^m) = C^\alpha, \quad \alpha = 2,\cdots,m. \tag{1.9.9}$$

点$(x^i)(i=1,\cdots,m)$在积分曲线上必须且只须(x^i)满足(1.9.9),坐标变换(1.9.8)则又可表示为

$$\begin{cases} v^1 = x^1, \\ v^\alpha = F^\alpha(x^1,\cdots,x^m), \quad \alpha = 1,\cdots,m. \end{cases} \tag{1.9.10}$$

显然,在坐标系$(v^i)(i=1,\cdots,m)$中,积分曲线就可以表示为

$$v^\alpha = C^\alpha, \quad \alpha = 2,\cdots,m.$$

其中 C^α 为任意常数,自然,积分曲线即 v^1 曲线的切向量 X 的方向与$\frac{\partial}{\partial v^1}$相同.

自然会问,若在微分流形上给定 r 个向量场 $X_1,\cdots,X_r$,并假定它们在每一点都是独立的,是否存在 r 维的子流形其在每一点切空间就是 $X_1,\cdots,X_r$ 在该点所张的空间? 以上讨论的就是 $r=1$

的情形.当 $r>1$ 时就比较复杂,将在下一节中讨论.

§10 Frobenius 定理

设 M 是 $n+r$ 维的微分流形.

定义 1.10.1 L 称为 M 的一个 r 维**平面场**,如果它在每一点 p,都决定 M_p 的一个 r 维的子空间 L_p.

L 称为 C^∞ 的,如果对 M 的每一点 p,都有 p 的邻域 U,以及 U 上的 r 个 C^∞ 向量场 $X_1,\cdots,X_r$,在 U 中的每一点 q,它们都构成 L_q 的一组基.并称 $X_1,\cdots,X_r$ 为 L 在 U 中的一个**局部基**.

以下均假设所讨论的平面场是 C^∞ 的.

向量场 X 称为属于 L 的,并记作 $X\in L$,如果对 M 中任一点 p,均有 $X_p\in L_p$.

定义 1.10.2 平面场 L 称为**对合的**,如果对任意的属于 L 的向量场 X 和 Y,均有 $[X,Y]\in L$.

定义 1.10.3 M 的一个子流形

$$f:\ V\to M$$

称为 r 维平面场 L 的一个**积分流形**,如果对 V 的任一点 p,均有

$$f_*V_p = L_{f(p)}.$$

由于 f_* 在每一点都是不退化的,V 一定是 r 维的流形.

对给定的平面场,积分流形是否存在、惟一?这就是本节所要讨论的问题.由于只讨论局部的性质,故不妨假设所讨论的范围是 M 上的一个坐标域.

设 $U:(x^i)(i=1,\cdots,n+r)$ 是 M 的一个坐标系,向量场 $X_{n+1},\cdots,X_{n+r}$ 是平面场 L 在 U 上的一个局部基,并不妨设在 U 上取向量场 $X_1,\cdots,X_n$ 使 $X_1,\cdots,X_n,X_{n+1},\cdots,X_{n+r}$ 在 U 上的每一点都构成 M 在该点的切空间的一组基,并且,由它在每一点的对偶基就得到 U 上的 $n+r$ 个处处线性无关的一次微分式 $\omega^1,\cdots,\omega^n,\omega^{n+1},\cdots,\omega^{n+r}$,使

$$\omega^i(X_j)=\delta^i_j,\quad i,j=1,\cdots,n+r.$$

显然，U 上的一个向量场 $X\in L$ 必须且只须

$$\omega^\alpha(X)=0,\quad \alpha=1,\cdots,n.$$

由积分流形的定义，一个 r 维子流形

$$f:\quad V\to U$$

是 L 的积分流形，必须且只须对 V 上的任一点 p 和任意的切向量 $X\in V_p$，均有

$$f_*X\in L_{f(p)},\quad p\in V.$$

由上面的讨论，其充分必要条件是

$$\omega^\alpha_{f(p)}(f_*X)=0,\quad \alpha=1,\cdots,n,$$

即

$$(f^*\omega^\alpha)_p(X)=0,\quad \alpha=1,\cdots,n.$$

对任意的 $p\in V$ 和 $X\in V_p$ 成立，也就是

$$f^*\omega^\alpha=0,\quad \alpha=1,\cdots,n,$$

在 V 上成立，即 $f^*\omega^\alpha(\alpha=1,\cdots,n)$ 是 V 上的零微分式．于是，求 L 的积分流形的问题就归结为求解方程

$$\omega^\alpha=0,\quad \alpha=1,\cdots,n.$$

为了叙述方便并以免一一声明，在本节中特对指标的取值范围做如下约定：$i,j,k=1,\cdots,n+r$；$\alpha,\beta,\gamma=1,\cdots,n$；$s,t=n+1,\cdots,n+r$.

设 $\omega^\alpha(\alpha=1,\cdots,n)$ 是 M 上的 n 个 C^∞ 的一次微分式，方程组

$$\omega^\alpha=0,\quad \alpha=1,\cdots,n \tag{1.10.1}$$

称为一阶**全微分方程组**或 **Pfaff 方程组**．M 上的一点 p 称为(1.10.1)的**正常点**，如果 $\omega^1,\cdots,\omega^n$ 在 p 点是独立的．显然，在正常点附近都是正常点．

由于所讨论的问题都是局部的，我们常假设在所讨论的范围内的每一点都是方程的正常点．

定义 1.10.4 M 的子流形

$$x:\ V\to M$$

称为 Pfaff 方程组(1.10.1)的积分流形，如果

$$x^*\omega^\alpha = 0,\quad \alpha = 1,\cdots,n.$$

于是，求平面场 L 的积分流形就归结为求 Pfaff 方程组(1.10.1)的 r 维即最高维的积分流形.

定义 1.10.5 Pfaff 方程组(1.10.1)称为**完全可积的**，如果经过 M 的每一点都有它的最高维积分流形.

下面讨论 Pfaff 方程组(1.10.1)完全可积的条件，并假设所讨论的范围为 M 的一个坐标域.

设 U：$(x^i)(i=1,\cdots,n+r)$是 M 的一个坐标系，则微分形式 $\omega^\alpha(\alpha=1,\cdots,n)$在 U 中就可以表示为

$$\omega^\alpha = a_i^\alpha \mathrm{d}x^i,\quad \alpha = 1,\cdots,n.$$

其 a_i^α 是 $x^1,\cdots,x^{n+r}$ 的 C^∞ 函数，于是 Pfaff 方程组(1.10.1)就表为

$$a_i^\alpha \mathrm{d}x^i = 0,\quad \alpha = 1,\cdots,n. \tag{1.10.2}$$

因此，求(1.10.1)的 r 维积分流形就是要求适合方程(1.10.2)的解

$$x^i = x^i(u^{u+1},\cdots,u^{n+r}),\quad i = 1,\cdots,n+r. \tag{1.10.3}$$

且其 Jacobi 矩阵的秩在每一点$(u^{n+1},\cdots,u^{n+r})$均为 r. 因为 ω^α $(\alpha=1,\cdots,n)$在每一点都是线性无关的，不妨设

$$\det(a_\beta^\alpha)_{n\times n} \neq 0,$$

则由方程(1.10.2)，

$$a_\beta^\alpha \mathrm{d}x^\beta + a_s^\alpha \mathrm{d}x^s = 0,\quad \alpha = 1,\cdots,n,$$

即

$$a_\beta^\alpha \mathrm{d}x^\beta = -a_s^\alpha \mathrm{d}x^s,$$

可将 $\mathrm{d}x^\beta(\beta=1,\cdots,n)$表示为 $\mathrm{d}x^s(s=n+1,\cdots,n+r)$的线性组合，假设积分流形是 r 维的，故 $\mathrm{d}x^s$ 在积分流形上每一点都是独立的，于是，在积分流形上每一点，

$$\frac{\partial(x^{n+1},\cdots,x^{n+r})}{\partial(u^{n+1},\cdots,u^{n+r})} \neq 0.$$

故可不妨设在 V 上取$(x^{n+1},\cdots,x^{n+r})$为它的坐标，积分流形则

表示为

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(x^{n+1},\cdots,x^{n+r}), \quad \alpha = 1,\cdots,n,$$

即

$$x: V \to U,$$

使

$$(x^{n+1},\cdots,x^{n+r}) \to (x^{1}(x^{s}),\cdots,x^{n}(x^{s}),x^{n+1},\cdots,x^{n+r})$$

为 Pfaff 方程组(1.10.2)的 r 维积流形,即有

$$x^{*}\omega^{\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,\cdots,n. \tag{1.10.4}$$

并由此得到

$$\mathrm{d}(x^{*}\omega^{\alpha}) = x^{*}(\mathrm{d}\omega^{\alpha}) = 0, \quad \alpha = 1,\cdots,n. \tag{1.10.5}$$

因为

$$\omega^{\alpha} = a^{\alpha}_{\beta}\mathrm{d}x^{\beta} + a^{\alpha}_{s}\mathrm{d}x^{s}, \quad \alpha = 1,\cdots,n$$

中 $\det(a^{\alpha}_{\beta})\neq 0$,所以 $\mathrm{d}x^{\beta}(\beta=1,\cdots,n)$可以用 $\omega^{\alpha},\mathrm{d}x^{s}(\alpha=1,\cdots,n,s=n+1,\cdots,n+r)$线性表出.因此 $\mathrm{d}\omega^{\alpha}(\alpha=1,\cdots,n)$必可表示为

$$\mathrm{d}\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta}\wedge\omega^{\beta} + c^{\alpha}_{st}\mathrm{d}x^{s}\wedge\mathrm{d}x^{t}, \quad \alpha = 1,\cdots,n. \tag{1.10.6}$$

其中 ω^{α}_{β} 为一次微分式,且

$$C^{\alpha}_{st} + C^{\alpha}_{ts} = 0, \quad \alpha = 1,\cdots,n; \quad s,t = n+1,\cdots,n+r.$$

由(1.10.4)和(1.10.5),

$$x^{*}(c^{\alpha}_{st}\mathrm{d}x^{s}\wedge\mathrm{d}x^{t}) = x^{*}C^{\alpha}_{st}x^{*}(\mathrm{d}x^{s}\wedge\mathrm{d}x^{t}) = 0, \quad \alpha=1,\cdots,n. \tag{1.10.7}$$

因为 $\mathrm{d}x^{s}(s=n+1,\cdots,n+r)$在每一点是独立的,$x_{*}$在每一点不退化,于是 $x^{*}(\mathrm{d}x^{s}\wedge\mathrm{d}x^{t})(s<t,s,t=n+1,\cdots,n+r)$在积分流形上每一点独立,所以

$$x^{*}C^{\alpha}_{st} = 0, \quad \alpha = 1,\cdots,n; \quad s,t = n+1,\cdots,n+r.$$

即在积分流形上每一点

$$C^{\alpha}_{st} = 0, \quad \alpha = 1,\cdots,n; \quad s,t = n+1,\cdots,n+r.$$

若 Pfaff 方程组是完全可积的,则过 U 上每一点都有 r 维积分流

形，因此，在 U 上每一点

$$C^{\alpha}_{st} = 0, \quad \alpha = 1,\cdots,n; s,t = n+1,\cdots,n+r.$$

并从而得到

$$\mathrm{d}\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta}, \quad \alpha = 1,\cdots,n. \qquad (1.10.8)$$

或表示为

$$\mathrm{d}\omega^{\alpha} \equiv 0(\mathrm{mod}\,\omega^{1},\cdots,\omega^{n}), \quad \alpha = 1,\cdots,n. \qquad (1.10.9)$$

这就得到 Pfaff 方程组完全可积的一个必要条件，称为 **Frobenius 条件**，或简称为 **F 条件**. 反之，还可以证明这个条件是充分的，即若方程组(1.10.1)满足 F 条件，则此方程组是完全可积的，这就是 Frobenius 定理.

定理 1.10.1 若 Pfaff 方程组

$$\omega^{\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,\cdots,n, \qquad (1.10.10)$$

满足 F 条件，即存在一次微分式 $\omega^{\alpha}_{\beta}(\alpha,\beta=1,\cdots,n)$ 使

$$\mathrm{d}\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta}, \quad \alpha = 1,\cdots,n, \qquad (1.10.11)$$

则此 Pfaff 方程组完全可积，即经过微分流形 M 的每一正常点，都有惟一的 r 维积分流形.

证明 先证明惟一性，即如果存在必惟一.

设 $U:(x^{i})(i=1,\cdots,n+r)$ 是 M 的一个坐标系，Pfaff 方程组(1.10.10)表示为

$$a^{\alpha}_{\beta}\mathrm{d}x^{\beta} + a^{\alpha}_{s}\mathrm{d}x^{s} = 0, \qquad (1.10.12)$$

且行列式 $\det(a^{\alpha}_{\beta}) \neq 0$，经过点 $(x^{i}_{0}) \in U$ 的 r 维积分流形

$$x: V \to U$$

可表示为

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(x^{n+1},\cdots,x^{n+r}), \quad \alpha = 1,\cdots,n. \quad (1.10.13)$$

即(1.10.13)满足方程(1.10.12)，且

$$x^{\alpha}(x^{n+1}_{0},\cdots,x^{n+r}_{0}) = x^{\alpha}_{0}, \quad \alpha = 1,\cdots,n.$$

显然，$(x^{s})(s=n+1,\cdots,n+r)$ 可以看作是 V 上的坐标，现在证明这个解是惟一的，即对 V 上的任一点 (x^{s})，对应在 r 维积分流形上的点

$$(x^i) = (x^a(x^s), x^s)$$

是惟一确定的.

设(x_1^s)是 V 中的任一点.

$$x^s = x^s(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad s = n+1, \cdots, n+r,$$

是连接(x_0^s)和(x_1^s)的一条曲线,即

$$(x_0^s) = (x^s(0)), \quad (x_1^s) = (x^s(1)).$$

此曲线在积分流形上相应的曲线

$$(x^i(t)) = (x^a(x^s(t), x^s(t)))$$

必满足方程

$$a_\beta^a(x^\gamma, x^s(t)) \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t} + a_s^a(x^\gamma, x^s(t)) \frac{\mathrm{d}x^s}{\mathrm{d}t} \doteq 0,$$

其中 $x^s(t)$和$\dfrac{\mathrm{d}x^s(t)}{\mathrm{d}t}$为已知,且 $\det(a_\beta^a) \neq 0$,故可表示为形为

$$\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}t} = X^a(t, x^1, \cdots, x^n), \quad \alpha = 1, \cdots, n,$$

的常微分方程组.由常微分方程组解的存在惟一性定理,其解 $x^a(t)(\alpha=1,\cdots,n)$由初始值惟一确定.所以,$(x_1^i) = (x^a(x_1^s), x_1^s)$惟一确定.惟一性得证.

存在性.只须证明,对任意给定的一点 $M_0(x_0^i) = (x_0^a, x_0^s) \in U$,都有满足方程(1.10.12)的解

$$x^a = x^a(x^{n+1}, \cdots, x^{n+r}), \quad \alpha = 1, \cdots, n,$$

合于初始条件 $x_0^a = x^a(x_0^s)$.设 $M_1(x_1^s)$是 V 中的任意一点,

$$x^s = x^s(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, s = n+1, \cdots, n+r, \qquad (1.10.14)$$

是 V 中连接 M_0 和 M_1 的一条曲线,即

$$(x_0^s) = (x^s(0)), \quad (x_1^s) = (x^s(1)),$$

将(1.10.14)代入方程(1.10.2),则都到常微分方程组

$$a_\beta^a(x^\gamma, x^s(t)) \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t} + a_s^a(x^\gamma, x^s(t)) \frac{\mathrm{d}x^s}{\mathrm{d}t} = 0.$$

对此方程,过(x_0^i)有惟一的积分曲线.这就是将方程(1.10.12)沿 V 中起自 M_0 的任一条路线进行积分,并由此得到 M_1 在 U 中的

对应点(x_1^i).问题是若沿由 M_0 到 M_1 不同路线进行积分,其端点是否相同.若端点都与积分的线路无关,则由此对应关系得到

$$x^\alpha = x^\alpha(x^{n+1},\cdots,x^{n+r}), \quad \alpha = 1,\cdots,n,$$

就是合要求的 r 维积分流形.因此,问题就归结为证明上述积分曲线的端点不依赖于连接 M_0 和 M_1 的曲线.

设

$$x^s = x^s(t,\lambda), \quad 0\leqslant t\leqslant 1, s = n_1,\cdots,n+r$$

是 U 中连接M_0 和 M_1 的一个可微的曲线族,λ 为族中的参数,并假设,

$$x^s(0,\lambda) = x_0^s, x^s(1,\lambda) = x_1^s, \quad s = n+1,\cdots,n+r.$$

于是,对族中的每一条曲线,都对应有存在 U 中的惟一的积分曲线使 $x^i(0,\lambda)=x_0^i$,即它们有相同的起点.现在证明,这些积分曲线的端点$(x^i(1,\lambda))$也是相同的,即它们与 λ 无关.这只须证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(x^i(1,\lambda)) = 0.$$

因为 Pfaff 方程组(1,10.1)满足 F 条件:

$$\mathrm{d}\omega^\alpha = \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta, \quad \alpha = 1,\cdots,n,$$

现考虑此式左右两端在$\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)$的值.由关于外微分的公式(1.6.3),并注意到$\left[\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial \lambda}\right]=0$,

$$\mathrm{d}\omega^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\omega^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\right), \tag{1.10.15}$$

而

$$\omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)= \frac{1}{2}\left(\omega_\beta^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\omega^\beta\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)-\omega_\beta^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)\omega^\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right), \tag{1.10.16}$$

又因为,对任意固定的 λ,$(x^i(t,\lambda))$,都是积分曲线,即

$$\omega^\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)= 0, \quad \beta = 1,\cdots,n,$$

比较(1.10.15)和(1.10.16)就得到 $\omega^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)$应满足的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\right)=\omega^\alpha_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\omega^\beta\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right),\quad \alpha=1,\cdots,n.$$

这是一个一阶齐次线性的常微分方程组，它有一个显然的零解，而当 $t=0$ 时，

$$\omega^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\bigg|_{t=0}=a^\alpha_i\mathrm{d}x^i\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\bigg|_{t=0}$$

$$=a^\alpha_i\frac{\partial}{\partial\lambda}(x^i(0,\lambda))=0,\quad \alpha=1,\cdots,n.$$

由解的惟一性，必有

$$\omega^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)=0,\quad \alpha=1,\cdots,n.$$

特别，

$$\omega^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\bigg|_{t=1}=a^\alpha_\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}(x^\beta(1,\lambda))+a^\alpha_s\frac{\partial}{\partial\lambda}(x^s(1,\lambda))$$

$$=a^\alpha_\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}(x^\beta(1,\lambda))=0,\quad \alpha=1,\cdots,n.$$

又因为 $\det(a^\alpha_\beta)\neq 0$，所以

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(x^\beta(1,\lambda))=0,\quad \beta=1,\cdots,n.$$

即积分曲线的终点与族中曲线无关，定理证毕.

特别，若取初始点为子流形 $x^s=0(s=n+1,\cdots,n+r)$上任意一点，即$(v^1,\cdots,v^n,0,\cdots,0)$，其中 $v^1,\cdots,v^n$ 为任意的值，则得到 Pfaff 方程组(1.10.12)的解

$$x^a=x^a(v^1,\cdots,v^n,x^{n+1},\cdots,x^{n+r}),\tag{1.10.17}$$

使

$$v^a=x^a(v^1,\cdots,v^n,0,\cdots,0),\tag{1.10.18}$$

所以，在子流形 $x^s=0(s=r+1,\cdots,n+r)$的近旁，由(1.10.17)可解得

$$v^\alpha=F^\alpha(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1},\cdots,x^{n+r}),\quad \alpha=1,\cdots,n.\tag{1.10.19}$$

当 v^a 取定任意常数 $C^\alpha(\alpha=1,\cdots,n)$时，(1.10.19)即

$$F^{\alpha}(x^1,\cdots,x^{n+r}) = C^{\alpha}, \quad \alpha = 1,\cdots,n$$

就决定方程组(1.10.12)的一个 r 维积分流形,这种在任一个积分流形上取值都是常数的函数称为方程的**首次积分**,r 维积分流形就又可以通过上述 n 个独立首次积分表示.由(1.10.17)和(1.10.19),可得到变换

$$\begin{cases} x^{\alpha} = x^{\alpha}(y^1,\cdots,y^n,y^{n+1},\cdots,y^{n+r}), & \alpha = 1,\cdots,n \\ x^s = y^s, & s = n+1,\cdots,n+r \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} y^{\alpha} = F^{\alpha}(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1},\cdots,x^{n+r}), & \alpha = 1,\cdots,n \\ y^s = x^s, & s = n+1,\cdots,n+r. \end{cases}$$

显然,这是一个允许的坐标变换,在坐标系(y^i)中,r 维积分流形的方程就是

$$y^{\alpha} = C^{\alpha}, \quad \alpha = 1,\cdots,n,$$

其中 C^{α} 为任意常数.于是,这些积分流形的切空间所构成的平面场就有一个局部基:$\dfrac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial y^n}$.

现在回到平面场的积分流形,前面已将求以向量场 $X_{n+1},\cdots,X_{n+r}$为局部基的平面场的积分流形的问题归结为求 Pfaff 方程组

$$\omega^{\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,\cdots,n$$

的最高维积分流形的问题.它的 Frobenius 条件

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta}, \quad \alpha = 1,\cdots,n$$

就可表示为

$$d\omega^{\alpha}(X_s,X_t) = 0, \quad \alpha = 1,\cdots,n.$$

对任意的 $X_s,X_t(s,t = n+1,\cdots,n+r)$成立,也就是

$$\omega^{\alpha}([X_s,X_t]) = 0, \quad \alpha = 1,\cdots,n; s,t = n+1,\cdots,n+r.$$

此条件成立必须且只须

$$[X_s,X_t] \in L, \quad s,t = n+1,\cdots,n+r.$$

即平面场是对合的.于是就得到下列定理.

定理 1.10.2 一个 C^{∞}的平面场经过任意一点都有惟一的积分流形必须且只须这个平面场是对合的.

进一步可得下列定理.

定理 1.10.3 在一个对合的 r 维 C^∞ 平面场的正常点近旁,都可以选取坐标系 $(y^i)(i=1,\cdots,n+r)$,使 $\frac{\partial}{\partial y^{n+1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^{n+r}}$ 构成这个平面场的局部基.

由以上讨论,做到这一点的关键是找出 Pfaff 方程组的 n 个独立的首次积分 $F^\alpha(\alpha=1,\cdots,n)$,方程 $F^\alpha=C^\alpha$ 各表示流形中的一族超曲面,上述坐标变换就是将这 n 族超面先作坐标曲面.

由本章中定理 1.2.6,F 条件也可以表示为

$$d\omega^\alpha \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n = 0, \quad \alpha = 1,\cdots,n.$$

对向量场,$r=1$,这时,F 条件恒成立.故一维积分流形即积分曲线总存在.

例 1.10.1 在 $R^3:(x,y,z)$中,给定

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

其中 P,Q 和 R 是(x,y,z)的可微函数,则

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$

于是,方程 $\omega=0$ 的 F 条件

$$\mathrm{d}\omega \wedge \omega = 0,$$

即为

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)R + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)Q + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)P = 0.$$

例 1.10.2 在 $R^n:(x^i)$中,给定

$$\omega = a_i\mathrm{d}x^i,$$

其中 a_i 为$(x^1,\cdots,x^n)$的可微函数,则

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial a_i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i.$$

于是,方程 $\omega=0$ 的 F 条件

$$\mathrm{d}\omega \wedge \omega = 0,$$

即为

$$\frac{\partial a_j}{\partial x^i} a_k \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k = 0$$

或

$$\left(\frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^j}\right)a_k + \left(\frac{\partial a_k}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j}{\partial x^k}\right)a_i + \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i}\right)a_j = 0,$$

$$i, j, k = 1, \cdots, n.$$

例 1.10.3 给定偏微分方程组

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = A_i(x^1, \cdots, x^n), \qquad i = 1, \cdots, n. \quad (1.10.20)$$

其中 A_i 是$(x^1, \cdots, x^n)$的可微函数. 令

$$\omega = \mathrm{d}f - A_i \mathrm{d}x^i,$$

则方程组(1.10.20)等价于方程

$$\omega = 0.$$

其 F 条件 $\mathrm{d}\omega \wedge \omega = 0$ 即为

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i}, \quad i, j = 1, \cdots, n.$$

事实上,这一条件反映了方程组(1.10)中的解 $f(x^1, \cdots, x^n)$的偏导数的交换性,即

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right), \qquad i, j = 1, \cdots, n.$$

例 1.10.4 设 $i, j = 1, \cdots, n; \alpha, \beta = 1, \cdots, k$,

$$\omega^\alpha = \mathrm{d}y^\alpha - a_i^\alpha(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n)\mathrm{d}x^i, \quad \alpha = 1, \cdots, k.$$

则由

$$\mathrm{d}\omega^\alpha = -\mathrm{d}a_i^\alpha \wedge \mathrm{d}x^i = -\frac{\partial a_i^\alpha}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i - \frac{\partial a_i^\alpha}{\partial y^\beta}\mathrm{d}y^\beta \wedge \mathrm{d}x^i$$

$$= \left(\frac{\partial a_i^\alpha}{\partial x^j} + \frac{\partial a_i^\alpha}{\partial y^\beta}a_i^\beta\right)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^i - \frac{\partial a_i^\alpha}{\partial y^\beta}\omega^\beta \wedge \mathrm{d}x^i,$$

得到 $\omega^\alpha = 0 (\alpha = 1, \cdots, k)$的 F 条件

$$\frac{\partial a_i^\alpha}{\partial x^j} + \frac{\partial a_i^\alpha}{\partial y^\beta}a_j^\beta = \frac{\partial a_j^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial a_j^\alpha}{\partial y^\beta}a_i^\beta.$$

§11 微分形式的积分

要在微分流形上定义积分，最大的困难是由局部到整体．微分流形是欧氏空间的粘合，在局部定义积分自然不成问题，问题是如何将在整体的积分局部化．以下采取的办法是利用单位分解定理，即通过分解1来分解微分流形，从而使微分形式的积分局部化．

考虑积分就有一个收敛的问题，自然希望被积函数仅在一个紧致子集上不为零．

设 M 是 m 维微分流形．

定义 1.11.1 设 $f: M \to R$ 是 M 上的实函数，则 f 取非零值的点集的闭包称为函数 f 的**支集**，记作 $\mathrm{supp} f$，即

$$\mathrm{supp} f = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}.$$

若 φ 是外微分形式，则 φ 的支集是

$$\mathrm{supp} \varphi = \overline{\{p \in M \mid \varphi(p) \neq 0\}}.$$

为证明单位分解定理，需要下列两个引理．其一是本章§6的引理1.6.2，并重述如下．

引理 1.11.1 设 C 是微分流形 M 的一个紧致子集，V 是包含 C 的一个开子集，则存在 M 上的 C^∞ 函数 ψ，其值在0和1之间，并且 ψ 在 C 上的值为1，在 V 外的值0．

其次，还需要下面的一个拓扑学的定理以及有关的概念．

定义 1.11.2 拓扑空间 X 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 称为**局部有限**的，如果 X 的任一紧致子集只与有限个 U_α 相交．

下面叙述有关的拓扑学的定理而不加证明．

引理 1.11.2 设 X 局部紧致的拓扑空间，且满足第二可数公理，K 是 X 的基，则存在 K 中子集组成的覆盖，适合局部有限的条件．

由于微分流形是局部欧氏的，当然是局部紧致的，且都假设满足第二可数公理，即都满足引理1.11.2的条件，因此，对微分流形 M 上的任一组基 K，存在 K 的子集，构成适合局部有限条件的覆

盖.

定理 1.11.1（单位分解定理） 设$\{U_i\}$是微分流形 M 的一个开覆盖，则存在 M 上的一族 C^∞ 函数$\{g_\alpha\}$，适合

1．对每一个 α，

$$0 \leqslant g_\alpha \leqslant 1,$$

且 $\mathrm{supp}g_\alpha$ 为包含于某一 U_i 之中的紧致子集.

2．对 M 上的每一点 p，必有的邻域 U，它只与有限个支集 $\mathrm{supp}g_\alpha$ 相交.

3．$\sum\limits_\alpha g_\alpha = 1.$

（由于条件 2，对任意一点 $p \in M$，和式中只有限项不为 0，求和有意义.）

函数族$\{g_\alpha\}$称为从属于开覆盖$\{U_i\}$的单位分解.

证明 设 W 是M 中的开集，且 $\overline{W}$ 紧致并包含于某一 U_i 之中，M 中全体这样的开集 W 构成M 的一组基.由引理 1.11.2，必有由其子集组成的 M 一组局部有限的开覆盖$\{W_\alpha\}$.进一步还可将 W_α 适当缩小成 V_α，使 $\overline{V}_\alpha \subset W_\alpha$，且$\{V_\alpha\}$仍构成 M 的一个开覆盖.由引理 1.11.1，存在 M 上的C^∞函数

$$h_\alpha:\ M \to R,$$

$0 \leqslant h \leqslant 1$，且 $h_\alpha | \overline{V}_\alpha = 1$，$h | M - W_\alpha = 0$.因为，对 M 中的每一点 p，都有 p 的邻域U，使 $\overline{U}$ 紧致，则它只与 W_α 中的有限个相交，即 h_α 中只有有限个在U 上不为零.所以 $\sum\limits_\alpha h_\alpha$ 有意义，又因为 M 上的任一点p 必属于某一 V_α，即有 $h_\alpha(p)=1$.所以 $\sum\limits_\alpha h_\alpha(p) \geqslant 1$，令

$$g_\alpha = h_\alpha \Big/ \sum_\alpha h_\alpha.$$

这是定义在 M 上的一族C^∞函数，并且，

1．$\mathrm{supp}g_\alpha = \mathrm{supp}h_\alpha$ 为紧致集 $\overline{W}_\alpha$ 中的闭集，故必为包含于某一 U_i 之中的紧致子集.

2. 对 M 上的任一点 p,必有包含 p 的邻域 U,它只与有限个 W_α 相交,而 $\mathrm{supp}g_\alpha \subset W_\alpha$,所以,$U$ 只与有限个 $\mathrm{supp}g_\alpha$ 相交.

3. $\sum_\alpha g_\alpha = \sum_\alpha h_\alpha \Big/ \sum_\alpha h_\alpha = 1$.

因此,g_α 即合于所求,即$\{g_\alpha\}$是从属于开覆盖$\{U_i\}$的单位分解.

为定义微分流形上的积分,还有一个需要说明的问题就是微分流形的定向,关于微分流形的定向,已经在§3 中给出定义,下面说明,我们也可以用外微分形式给出的微分流形的定向.

定理 1.11.2 m 维微分流形 M 是可定向的,必须且只须在 M 上存在一个连续的、处处不为零的 m 次外微分形式.

证明 必要性. 设 M 是可定向的,$\{U_\alpha: u_\alpha^i, i=1,\cdots,m\}$是 M 的一个局部有限的坐标覆盖,它给出 M 的一个定向,即所有坐标变换的函数行列式都大于零. 由单位分解定理,必有从属于这个坐标覆盖的单位分解$\{g_\alpha\}$,其中 $\mathrm{supp}g_\alpha \subset U_\alpha$. 于是

$$\omega = \sum_\alpha g_\alpha \mathrm{d}u_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_\alpha^m$$

就是 M 上合于要求的 m 次外微分形式.

充分性. 设 ω 是 M 上的一个连续的、处处不为零的 m 次外微分形式,对 M 上任一点 p,必有包含 p 的坐标系 $U:(u^i),(i=1,\cdots,m)$,在其中 ω 可表示为

$$\omega = A\mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^m,$$

其中 $A(u^1,\cdots,u^m)>0$,这样就得到 M 的一个坐标覆盖$\{U_\alpha\}$. 设 $U_\alpha:(u_\alpha^i)$ 和 $U_\beta:(u_\beta^i)$ 是这个覆盖中的任意两个坐标系,则在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 中,

$$\begin{aligned}\omega &= A_\alpha \mathrm{d}u_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_\alpha^m \\ &= A_\beta \mathrm{d}u_\beta^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_\beta^m,\end{aligned}$$

其中 A_α, A_β 均大于零. 于是,坐标变换的函数行列式 $A_\alpha A_\beta^{-1}>0$,即$\{U_\alpha\}$给出 M 的一个定向. 所以,M 是可定向的.

因此,我们也可以用一个连续的、处处不为零的 m 次外微分形式 ω 给出可定向流形 M 的一个定向,凡与 ω 相差一个正因子

的外微分形式即可表示一定向，相差一个负因子的则表示相反的定向. 设 $U;(u^i)$ 是 M 上的一个坐标系，若 $du^1\wedge\cdots\wedge du^m$ 与 $\omega|U$ 差一正因子，则称之为与 M 的定向相符的坐标系. 进一步则有与 M 的定向相符的坐标覆盖.

下面来定义外微分形式的积分.

设 M 是定向的 m 维微分流形，φ 是 M 上的 m 次外微分形式，有紧致的支集，$\{U_i\}$ 是与 M 的定向相符的坐标覆盖，$\{g_\alpha\}$ 是从属于这一坐标覆盖的单位分解，则在 M 上恒有

$$\varphi = \left(\sum_\alpha g_\alpha\right)\varphi = \sum_\alpha g_\alpha\varphi . \tag{1.11.1}$$

显然，$\mathrm{supp}g_\alpha\varphi\subset\mathrm{supp}g_\alpha$ 包含于某一坐标域 U_i 之中，于是定义

$$\int_M g_\alpha\varphi = \int_{U_i} g_\alpha\varphi, \tag{1.11.2}$$

其右端理解为通常的 Riemann 积分，即如果 $g_\alpha\varphi$ 在 U_i 中表示为

$$g_\alpha\varphi = f(u^1,\cdots,u^m)du^1\wedge\cdots\wedge du^m.$$

则(1.11.2)的右端规定为 Riemann 积分

$$\int_{U_i} f(u^1,\cdots,u^m)du^1\cdots du^m. \tag{1.11.3}$$

要说明上述定义有意义的，还必须证明(1.11.2)的右端与坐标系的选取无关. 设 $\mathrm{supp}g_\alpha\subset U_i\cap U_j$，与 U_i 和 U_j 相应的坐标分别为 (u^k) 和 (v^k). 因为坐标覆盖是与定向相符的，所以，其坐标变换函数行列式即 Jacobi 行列式

$$J = \frac{\partial(v^1,\cdots,v^m)}{\partial(u^1,\cdots,u^m)} > 0.$$

设 $g_\alpha\varphi$ 在 U_i 和 U_j 中的表示式分别为

$$\begin{aligned} g_\alpha\varphi &= f du^1\wedge\cdots\wedge du^m \\ &= f' dv^1\wedge\cdots\wedge dv^m, \end{aligned}$$

则有

$$f = f'J = f'|J|, \tag{1.11.4}$$

并且，$\mathrm{supp}f = \mathrm{supp}f' = \mathrm{supp}(g_\alpha\varphi)\subset U_i\cap U_j$. 根据 Riemann 积分

的变量变换公式

$$\int_{U_i\cap U_j} f' dv^1\cdots dv^m = \int_{U_i\cap U_j} f' \mid J \mid du^1\cdots du^m$$

$$= \int_{U_i\cap U_j} f du^1\cdots du^m,$$

即

$$\int_{U_i} g_\alpha\varphi = \int_{U_j} g_\alpha\varphi .$$

这就证明了上述定义与坐标的选取无关.

因为 φ 的支集 $\mathrm{supp}\varphi$ 是紧致的,由单位分解定理的条件 2, $\mathrm{supp}\varphi$ 只与有限个支集 $\mathrm{supp}g_\alpha$ 相交,因此,(1.11.1)的右端为有限项的和.命

$$\int_M \varphi = \sum_\alpha \int_M g_\alpha\varphi, \tag{1.11.5}$$

对于每一个从属于这个坐标覆盖的单位分解,上式右端是完全确定的,下面证明它与单位分解 $\{g_\alpha\}$ 的选取无关.

设 $\{g_\beta'\}$ 从属于这个坐标覆盖的另一个单位分解,则

$$\sum_\beta \int_M g_\beta'\varphi = \sum_\beta \sum_\alpha \int_M g_\alpha g_\beta'\varphi$$

$$= \sum_\alpha \int_M \sum_\beta g_\beta' g_\alpha\varphi = \sum_\alpha \int_M g_\alpha\varphi.$$

这就证明了(1.11.5)的右端与单位分解的选取无关,即 $\int_M \varphi$ 是完全确定的.

定义 1.11.3 设 M 是 m 维的定向的微分流形,φ 是 M 上有紧致支集的 m 次外微分形式,则由(1.11.5)定义的数值 $\int_M \varphi$ 称为 φ 在 M 上的积分.

若 $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ 都是 M 上有紧致支集的 m 次外微分形式,C 是任意实数,则 $\varphi_1+\varphi_2, C\varphi$ 也是有紧致支集的 m 次微分形式,则由

积分的定义立即可知

$$\int_M (\varphi_1+\varphi_2)=\int_M \varphi_1+\int_M \varphi_2,\quad \int_M C\varphi = C\int_M \varphi.$$

因此，$\int_M$ 是 M 上有紧致支集的 m 次外微分形式的集合上的线性函数.

若 $\mathrm{supp}\varphi$ 包含于某一坐标域 U 内，φ 可表成

$$\varphi = f(u^1,\cdots,u^m)\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}u^m,$$

则 $\int_M \varphi$ 正是 Riemann 积分

$$\int_M \varphi = \int_U f\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^m.$$

可见，现在所定义的 M 上的积分确是普通 Riemann 积分的推广.

若 φ 是 $r(<m)$ 次的外微分形式，且有紧致支集 $\mathrm{supp}\varphi$，则可定义 φ 在 M 的 r 维子流形上的积分. 设

$$h: N\to M$$

是 M 的 r 维的嵌入子流形，则 $h^*\varphi$ 是 N 上的 r 次微分形式，且有紧致支集. 因此，$\int_N h^*\varphi$ 是有意义的，我们则将它定义为 φ 在 M 的子流形 $h(N)$ 上的积分，即

$$\int_{h(N)}\varphi = \int_N h^*\varphi.$$

§12 Stokes 定理

Stokes 定理给出了一个区域上的积分和它的边界上的积分的联系，这是下列一些已知的基本公式的推广.

例 1.12.1 设 $D=[a,b]$ 是 R^1 上的闭区间，f 是 D 上的连续可微函数，则有微积分学的基本公式

$$\int_D \mathrm{d}f = f(b)-f(a). \qquad (1.12.1)$$

若用∂D记D的有向边界$\{b\}-\{a\}$,则上式可写成

$$\int_D \mathrm{d}f = \int_{\partial D} f. \tag{1.12.2}$$

例 1.12.2 设D是R^2中的一个有界区域,其定向与R^2一致,∂D是D的有向边界,其定向由D的定向所诱导,即∂D的正向与指向区域内部的法向构成与R^2的定向一致的标架,P和Q是D上的连续可微函数,则有 Green 公式

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.12.3}$$

令

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

(1.12.3)可写作

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D \mathrm{d}\omega. \tag{1.12.4}$$

例 1.12.3 设D是R^3中的一个有界区域,其定向与R^3一致,∂D是D的有向边界,其定向以外法线方向为正向诱导,P、Q和R是D上的连续可微函数,则有 Gauss 公式

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{1.12.5}$$

令

$$\varphi = P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

则(1.12.5)可写作

$$\int_{\partial D} \varphi = \int_D \mathrm{d}\varphi . \tag{1.12.6}$$

例 1.12.4 设S是R^3中的一块有向曲面,其边界∂S为有向闭曲线,而且∂S的正向与S的正向法向量符合右手法则(假定R^3以右手系为正定向),P、Q和R是包含S在内的一个区域上的连

续可微函数,则有 Stokes 公式

$$\int_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$= \int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.12.7}$$

令

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

则(1.12.7)可写作

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S \mathrm{d}\omega. \tag{1.12.8}$$

可见,上述四个公式用外微分记号则具有统一的形式.本节中要给出的 Stokes 公式则是上述公式在微分流形上的推广.为此,首先要阐明定向微分流形上的一个区域的定向与它的边界的定向之间的关系.

设 M 是 m 维的定向微分流形,D 是 M 上的一个带边区域,则 D 自然有与 M 一致的定向.设 B 是 D 的边界点的集合,则对 B 上的任一点 p,必有包含 p 的与定向相符的坐标系 $U:(u^i)(i=1,\cdots,m)$,使

$$U \cap D = \{q \in U \mid u^m(q) \geqslant 0\}, \tag{1.12.9}$$

以及

$$U \cap B = \{q \in U \mid u^m(q) = 0\}, \tag{1.12.10}$$

并称为在边界点 p 的适用坐标.这时,$(u^1,\cdots,u^{m-1})$就给出 B 在 p 近旁的一个坐标系,并从而得到 B 的一个坐标覆盖,并且,由

$$(-1)^m\mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{m-1} \tag{1.12.11}$$

给出了边界 B 在 p 的坐标域 $U\cap B$ 的一个定向.现在证明,如此给出的定向是彼此相容的,设 $V:(v^i)$是另一个与 M 的定向相容的坐标系,且 $U\cap V\cap B\neq\varnothing$,则有

$$\frac{\partial(v^1,\cdots,v^m)}{\partial(u^1,\cdots,u^m)} > 0. \tag{1.12.12}$$

设 $v^m = f^m(u^1, \cdots, u^m)$，则对任意固定的 $u^1, \cdots, u^{m-1}$，变量 v^m 的符号与 u^m 的相同，并且，当 $u^m = 0$ 时，$v^m = 0$，即 $f^m(u^1, \cdots, u^{m-1}, 0) = 0$，于是，在边界 $U \cap V \cap B$ 上，

$$\frac{\partial v^m}{\partial u^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, m-1, \quad \frac{\partial v^m}{\partial u^m} > 0,$$

由(1.12.12)就得到，在 $U \cap V \cap B$ 上

$$\frac{\partial(v^1, \cdots, v^{m-1})}{\partial(u^1, \cdots, u^{m-1})} > 0.$$

这就说明，$(-1)^m \mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{m-1}$ 和 $(-1)^m \mathrm{d}v^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}v^{m-1}$ 在 $U \cap V \cap B$ 上给出的定向是一致的. 于是，由(1.12.11)给出了 B 的一个定向，称为定向流形 M 在 B 上的诱导定向，并将具有诱导定向的边界 B 记作 ∂D. 容易验证，上述四个例子中 ∂D 和 ∂S 的定向恰是诱导定向.

定理 1.12.1(Stokes)　设 M 是 m 维的定向微分流形，D 是 M 中的带边区域，ω 是 M 上的有紧致支集的 $m-1$ 次外微分形式，则

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \omega. \tag{1.12.13}$$

若 $\partial D = \varnothing$，则规定左边的积分为零.

证明　设 $\{U_i\}$ 是与 M 的定向相符的局部有限的一个坐标覆盖，$\{g_\alpha\}$ 是从属于它的一个单位分解，因为 $\mathrm{supp}\omega$ 是紧致的，它只与有限个 U_i 相交，所以

$$\omega = \sum_\alpha g_\alpha \omega \tag{1.12.14}$$

为有限和，并从而有

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \sum_\alpha \int_D \mathrm{d}(g_\alpha \omega), \quad \int_{\partial D} \omega = \sum_\alpha \int_{\partial D} g_\alpha \omega.$$

因此，只须证明，对每一个 α，均有

$$\int_D \mathrm{d}(g_\alpha \omega) = \int_{\partial D} g_\alpha \omega.$$

为此，不妨假设 $\mathrm{supp}\omega$ 包含在上述坐标覆盖的某一个坐标域

$U:(u^i)$之中,并设 ω 表示为

$$\omega = \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}a_j \mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\mathrm{d}u^j} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^m,$$

(1.12.15)

其中 $a_j(j=1,\cdots,m)$是 U 上的可微函数.这时

$$\mathrm{d}\omega = \left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial a_j}{\partial u^j}\right)\mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^m. \qquad (1.12.16)$$

以下分两种情形证明.

1. 若 $U\cap\partial D=\varnothing$,由于 $\mathrm{supp}\omega\subset U$,则必有

$$\int_{\partial D}\omega = 0.$$

这时,U 或者包含在$M-D$ 内,或者包含在 D 内.对于前者,自然有 $\int_D \mathrm{d}\omega = 0$. 对于后者,则有

$$\begin{aligned}\int_D \mathrm{d}\omega &= \sum_{j=1}^{m}\int_U \frac{\partial a^j}{\partial u^j}\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^m \\ &= \sum_{j=1}^{m}\int_U\left(\frac{\partial a_j}{\partial u^j}\mathrm{d}u^j\right)\mathrm{d}u^1\cdots \hat{\mathrm{d}u^j}\cdots\mathrm{d}u^m.\end{aligned}$$

而

$$\int_U \frac{\partial a^j}{\partial u^j} = a_1(S) - a_j(Q) = 0,$$

其中 S 和 Q 为∂U 上的点,于是也有 $\int_D \mathrm{d}\omega = 0$. 这也就证明了

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D}\omega.$$

2. 若 $U\cap\partial D\neq\varnothing$,不妨设 U 是与M 的定向相符的适用坐标,即有

$$U \cap D = \{q \in U \mid u^m(q) \geqslant 0\},$$

以及

$$U \cap \partial D = \{q \in U \mid u^m(q) = 0\},$$

因此,在 $U\cap\partial D$ 上,$du^m=0$. 于是

$$\int_{\partial D}\omega=\int_{U\cap\partial D}\omega$$

$$=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int_{U\cap\partial D}a_j du^1\wedge\cdots\wedge\widehat{du^j}\wedge\cdots\wedge du^m$$

$$=(-1)^{m-1}\int_{U\cap\partial D}a_m du^1\wedge\cdots\wedge du^{m-1}. \qquad (1.12.17)$$

由于∂D 的定向为$(-1)^m du^1\wedge\cdots\wedge du^{m-1}$,则有

$$\int_{\partial D}\omega=-\int_{U\cap\partial D}a_m(u^1,\cdots,u^{m-1},0)du^1\cdots du^{m-1}.$$

另一方面,

$$\int_D d\omega=\int_{D\cap U}d\omega=\sum_{j=1}^{m}\int_{D\cap U}\frac{\partial a_j}{\partial u^j}du^1\wedge\cdots\wedge du^m,$$

而当 $j=1,\cdots,m-1$ 时,

$$\int_{D\cap U}\frac{\partial a_j}{\partial u^j}du^1\wedge\cdots\wedge du^m=\int_{D\cap U}\left(\frac{\partial a_j}{\partial u^j}du^j\right)du^1\cdots\widehat{du^j}\cdots du^m=0.$$

因此

$$\int_D d\omega=\int_{D\cap U}\left(\frac{\partial a_m}{\partial u^m}du^m\right)du^1\cdots du^{m-1}$$

$$=\int(a_m(Q)-a_m(u^1,\cdots,u^{m+1},0))du^1\cdots du^{m-1}$$

$$=-\int a_m(u^1,\cdots,u^{m-1},0)du^1\cdots du^{m-1},$$

其中 Q 是∂U 上的点,比较(1.12.17),即有

$$\int_D d\omega=\int_{\partial D}\omega.$$

定理得证.

在实际应用中,经常遇到的闭区域 D 是紧致的,所以不必假定 ω 有紧致的支集,而 Stokes 公式仍然成立.

习　题

1. 证明

$$\delta^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p}\delta^{j_1\cdots j_p i_{p+1}\cdots i_{p+q}}_{k_1\cdots k_p k_{p+1}\cdots k_{p+q}} = p!\delta^{i_1\cdots i_{p+q}}_{k_1\cdots k_{p+q}},$$

并计算

$$\delta^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p}\delta^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_p}.$$

式中指标的取值范围 $1,\cdots,n$.

2. 设 α 是 p 阶协变张量. 证明:

(1) α 是对称的必须且只须 $\alpha=(\alpha)$.

(2) α 是反称的必须且只须 $\alpha=[\alpha]$.

3. 设 α,β 和 γ 是向量空间 V 上的一次形式, (α_i), (β_i) 和 (γ_i) $(i=1,\cdots,n)$ 分别为它们对 V 上给定的一组基的坐标, 求 $\alpha\wedge\beta$ 和 $\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$ 的坐标.

4. 设 α 和 β 分别为向量空间 V 上的一次和二次外形式, (α_i) 和 (β_{ij}) 分别为它们对 V 上一组基的坐标, 求 $\alpha\wedge\beta$ 的坐标.

5. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是向量空间 V 上的 r 个线性无关的一次形式, ω 是 V 上 p 次外形式, 证明: 存在 r 个 $p-1$ 次外形式 $\psi_1\cdots\psi_r$ 使 ω 表示成

$$\omega = \alpha_1\wedge\psi_1+\cdots+\alpha_r\wedge\psi_r$$

的充分必要条件是

$$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_r\wedge\omega = 0.$$

6. 设 $v_\alpha,\omega_\alpha,v_\alpha',\omega_\alpha'$ $(\alpha=1,\cdots,k)$ 是向量空间 V 上的两组一次形式, $v_1,\cdots,v_k,\omega_1\cdots\omega_k$ 是线性无关的. 且

$$\sum_{\alpha=1}^{k} v_\alpha\wedge\omega_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{k} v_\alpha'\wedge\omega_\alpha',$$

则 v_α',ω_α' 都是 $v_1,\cdots,v_k,\omega_1,\cdots,\omega_k$ 的线性组合, 而且它们也是线性无关的.

7. 设 $\alpha^1\cdots\alpha^n$ 是 $n+r$ 维微分流形 M 的一个开集 U 上的 n 个一次微分式. 在每一点是线性无关的; $X_{n+1},\cdots X_{n+r}$ 是 U 上的 r 个向量场, 在每一点也是线性无关的, 并且

$$\alpha^s(X_i) = 0,\quad s=1,\cdots n, i=n+1,\cdots,n+r.$$

证明: 在 U 中的任一点近旁, 必存在向量场 $X_1,\cdots,X_n$ 和微分式 $\alpha^{n+1},\cdots,\alpha^{n+r}$, 使 $X_1,\cdots,X_n,X_{n+1},\cdots,X_{n+\gamma}$ 构成局部基, 并且

$$\alpha^a(X_b) = \delta^a_b, \quad a,b = 1,\cdots,n+\gamma.$$

8. 设 M 和 N 分别为 m 和 n 维的微分流形，M 连通，

$$f: \quad M \to N,$$

$f_* \equiv 0$，证明：$f(M)$ 必为 N 中的一点.

第二章 李 群

§1 拓 扑 群

拓扑群是群与拓扑空间的结合,所谓结合,就是群的运算与拓扑空间的结构相容.

定义 2.1.1 集合 G 称为**拓扑群**,如果

1. G 是群.
2. G 是拓扑空间.
3. 群的运算

$$(x,y)\to xy^{-1},\quad x,y\in G \tag{2.1.1}$$

是

$$G\times G\to G$$

的连续映射.

条件 3 表示了群的运算与拓扑结构的相容性,也常称为**相容条件**.

例 2.1.1 在任意给定的群 G 上,定义离散的拓扑成为一个离散的拓扑空间.显然,群的运算是连续的,因而为一拓扑群.这就是说,任意的一个群都可以看作是一个离散的拓扑群.

例 2.1.2 全体实数 R 对加法构成群,显然,群的运算对 R 上的通常的拓扑相容,因而为一拓扑群.

一般的,n 维向量空间 V^n,对向量的加法和通常的拓扑为拓扑群.

例 2.1.3 R 中的全体有理数的集合 P,它对加法也成群,且是 R 的子群.P 作为拓扑空间 R 的子集对其诱导拓扑构成一拓扑空间,即 R 的拓扑子空间.显然,群的运算是连续的,因而 P 也是拓扑群.

是连续的，τ 称为G 的**逆射**. 因为 G 中任意元素的逆元素都存在，所以，τ 是满映射. 以下证明，τ 是G 上的同胚.

定理 2.1.2 逆射 τ 是拓扑群G 上的同胚.

证明 只须证明 τ 的逆映射存在且连续. 因为，对任意的 $x \in G$，

$$\tau \cdot \tau(x) = x,$$

所以 $\tau \cdot \tau$ 的G 上的恒同映射. 于是 τ^{-1}存在，且

$$\tau^{-1} = \tau.$$

所以 τ 是G 上的同胚.

若 a 是G 中任意给定的一个元素，将 a 左乘G 中的元素，则得到 $G \to G$ 的映射

$$x \to ax, \quad x \in G$$

称为**左移**并记作 L_a，即

$$L_a x = ax, \quad x \in G.$$

它是由给定的元素 a 确定的. 显然，左移是 G 上的连续映射. 同样的，经右乘得到的映射

$$x \to xa, \quad x \in G$$

称为**右移**，记作 R_a，它也是 $G \to G$ 的连续映射.

定理 2.1.3 左移 L_a 和右移R_a 都是G 上的同胚.

证明 因为，对任意的 $x \in G$，

$$(L_a \circ L_{a^{-1}})x = L_a(a^{-1}x) = a(a^{-1}x) = x,$$

以及

$$(L_{a^{-1}} \circ L_a)x = L_{a^{-1}}(ax) = a^{-1}(ax) = x,$$

即有

$$L_a \circ L_{a^{-1}} = L_{a^{-1}} \circ L_a = \text{恒同}.$$

因此 L_a 的逆映射存在，且

$$L_{a^{-1}} = L_a^{-1}.$$

又因为 $L_{a^{-1}}$是连续的，所以，L_a 是同胚.

类似地可以证明 R_a 是同胚.

是连续的，τ 称为G 的**逆射**.因为 G 中任意元素的逆元素都存在，所以，τ 是满映射.以下证明，τ 是G 上的同胚.

定理 2.1.2 逆射 τ 是拓扑群G 上的同胚.

证明 只须证明 τ 的逆映射存在且连续.因为，对任意的 $x \in G$，

$$\tau \cdot \tau(x) = x,$$

所以 $\tau \cdot \tau$ 的G 上的恒同映射.于是 τ^{-1}存在，且

$$\tau^{-1} = \tau.$$

所以 τ 是G 上的同胚.

若 a 是G 中任意给定的一个元素，将 a 左乘G 中的元素，则得到 $G \to G$ 的映射

$$x \to ax, \quad x \in G$$

称为**左移**并记作 L_a，即

$$L_a x = ax, \quad x \in G.$$

它是由给定的元素 a 确定的.显然，左移是 G 上的连续映射.同样的，经右乘得到的映射

$$x \to xa, \quad x \in G$$

称为**右移**，记作 R_a，它也是 $G \to G$ 的连续映射.

定理 2.1.3 左移 L_a 和右移R_a 都是G 上的同胚.

证明 因为，对任意的 $x \in G$，

$$(L_a \circ L_{a^{-1}})x = L_a(a^{-1}x) = a(a^{-1}x) = x,$$

以及

$$(L_{a^{-1}} \circ L_a)x = L_{a^{-1}}(ax) = a^{-1}(ax) = x,$$

即有

$$L_a \circ L_{a^{-1}} = L_{a^{-1}} \circ L_a = \text{恒同}.$$

因此 L_a 的逆映射存在，且

$$L_{a^{-1}} = L_a^{-1}.$$

又因为 $L_{a^{-1}}$是连续的，所以，L_a 是同胚.

类似地可以证明 R_a 是同胚.

于是,左移和右移都是拓扑群 G 上的同胚变换,现在考虑 G 上的全体左移变换的集合

$$\{L_a \mid a \in G\},$$

在这个集合中,由变换的乘积自然定义了乘法.不难验证,对这个乘法,此集合构成一群,称为拓扑群 G 的**左移变换群**,且群中的单位元素 e 对应的左移为恒同变换,即

$$L_e = \text{恒同}.$$

显然,由 G 中的元素 a 与左移 L_a 的对应给出 G 与它的左移变换群之间的一一对应,并且,对任意的 $a,b \in G$,

$$L_a \circ L_b = L_{ab}. \tag{2.1.4}$$

因此,上述对应给出拓扑群 G 与它的左移变换群之间的一个同构,即 G 与它的左移变换群同构.同样,G 上的全体右移变换也构成一群,称为 G 的**右移变换群**,它也与 G 同构.对右移变换,同样的有 $R_e =$ 恒同,$R_{a^{-1}} = R_a^{-1}$, $a \in G$.但与(2.1.4)不同,

$$R_a \circ R_b = R_{ba}, \quad a,b \in G. \tag{2.1.5}$$

于是,由上述同构,拓扑群 G 的结构就可以表现为左移或右移.

设 a 和 b 是拓扑群 G 中的任意两个元素,则左移变换

$$L_{ba^{-1}}: \quad G \to G$$

使

$$L_{ba^{-1}} a = b,$$

即存在 G 上的左移将 a 变为 b.这就是所谓的**齐性**.事实上,我们还容易证明上述左移惟一存在.

由于左移是同胚,因此,拓扑群上任意两点的局部拓扑性质相同.所以,拓扑群的拓扑结构可以由单位近旁的拓扑结构加上左移或右移得到.

以下讨论拓扑群的一些进一步的重要性质.

定理 2.1.4 拓扑群 G 作为拓扑空间是正则的.

证明 因为 G 是齐性的,只须证明单位 e 与不包含它的任意

闭集可分.

设 A 是 G 中不包含 e 的任一闭集.则

$$U = G - A$$

是包含 e 的开集.由相容性条件以及 $e \cdot e^{-1} = e$,必有 e 的邻域 V,使

$$VV^{-1} \subset U,$$

其中 V^{-1}是 V 中元素的逆元素的集合,它也是包含 e 的开集,VV^{-1}则是两个集合的元素的乘积的集合.

现在证明 V 的闭包$\overline{V} \subset U$.设 p 是$\overline{V}$ 中的任意一点,则 p 的任一邻域与 V 相交.因为左移是同胚,则

$$pV = \{pv \mid v \in V\}$$

是 p 的一个邻域.因此,$pV \cap V$ 非空.设 $b \in pV \cap V$,则必有 $a \in V$,使 $pa = b \in V$,即有

$$p = ba^{-1} \in VV^{-1} \subset U.$$

这就证明了 $\overline{V} \subset U$.从而得到 $\overline{V}$ 的余集,即开集

$$G - \overline{V} \supset G - U = A,$$

这样,开集 V 和$G - \overline{V}$ 就分离了e 和A,所以,G 是正则的拓扑空间.

定理 2.1.5 拓扑群的开子群是闭的.

证明 设 H 是拓扑群G 的一个开子群.因为左移是同胚,则对 G 中的任意元素 a,aH 都是开集.

现在证明,若 $a \overline{\in} H$,则 aH 与H 不相交,假若不然,即 $aH \cap H$ 不空,必有 $b \in aH \cap H$,从而必有 $p \in H$ 使$b = ap$.又因为 H 是子群,则有 $a = bp^{-1} \in H$,与 $a \overline{\in} H$ 的假设矛盾.

于是,下列集合的和

$$\bigcup_{a \overline{\in} H} aH$$

是开集,且是 H 的余集.所以,H 的闭的.

由此可知,若 G 是连通的,则其非空开子群必为 G,又因为,由 G 的任意的非空开集生成的子群必为开集,故必为 G.所以,连通的拓扑群可由它的任一邻域生成,特别,可由它单位 e 的一个邻

域生成.

定理 2.1.6 拓扑群的子群的闭包也是子群.

证明 设 H 拓扑群 G 的一个子群,要证 H 的闭包 $\overline{H}$ 也是子群.只要证明,对任意的 $a,b\in\overline{H}$,必有 $ab^{-1}\in\overline{H}$,也就对 ab^{-1} 的任意邻域 V,均有 $V\cap H$ 非空.

由相容性条件,对 ab^{-1} 的任意邻域 V,必有 a 的邻域 A 和 b 的邻域 B,使

$$AB^{-1}\subset V.$$

又因为 $a,b\in\overline{H}$,故 $A\cap H$ 都非空,即必有 $a_1\in A\cap H,b_1\in B\cap H$.而 H 是子群,故有

$$b_1^{-1}\in B^{-1}\cap H,\quad a_1b_1^{-1}\in H,$$

所以

$$a_1b_1^{-1}\in AB^{-1}\cap H\subset V\cap H,$$

即 $V\cap H$ 非空.

进一步还可以证明,若 H 是 G 的正规子群,则 $\overline{H}$ 也是 G 的正规子群.

定义 2.1.2 拓扑群 G 的包含单位 e 的最大连通子集 G_0 称为 G 的**单位连通分支**.

定理 2.1.7 拓扑群的单位连通分支是它的正规闭子群.

证明 设 G_0 是拓扑群 G 的单位连通分支.它是包含单位 e 的一个闭集合.只须证明,G_0 是 G 的正规子群.由右移是同胚,对任意的 $a\in G_0$,G_0a^{-1} 也是 G 的连通子集,且单位 $e=aa^{-1}\in G_0a^{-1}$,即 G_0a^{-1}是包含 e 的连通子集.于是,$G_0a^{-1}\subset G_0$.又因为 a 是 G 中的任意元素,所以 $G_0G_0^{-1}\subset G_0$,这就证明了 G_0 是 G 的闭子群.

由于左移和右移都是同胚,对任意的 $a\in G$,aG_0a^{-1}是 G 的连通子集,且 $e=aea^{-1}\in aG_0a^{-1}$于是 $aG_0a^{-1}\subset G$,即 G_0 是 G 的正规子群.

进一步,若 G 是流形,其单位连通分支 G_0 是 G 中既开又闭

的集合，则商群 G/G_0 作为商空间其中的每个元素都是既开又闭的，即 G/G_0 是离散群.

定理 2.1.8 连通拓扑群的离散正规子群必属于中心.

证明 设 H 是连通的拓扑群 G 的离散正规子群，对 H 中的每一元素 a，定义

$$\sigma_a: \quad G \to G,$$

使

$$\sigma_a x = xax^{-1}, \quad x \in G.$$

由相容条件，σ_a 是连续映射，且 $\sigma_a e = a$.

因为 H 是 G 的正规子群，对任意的 $a \in H$，则有

$$\sigma_a x = xax^{-1} \in H,$$

即 $\sigma_a G \subset H$. 由于 G 是连通的，故 $\sigma_a G$ 也是连通的. 又因为 H 是离散的，$\sigma_a G$ 必 H 中一点，特别，必有

$$\sigma_a G = \sigma_a e = a.$$

即

$$xax^{-1} = a,$$

对任意的 $a \in H, x \in G$ 成立，所以 a 必属于 G 的中心.

§2 李 群

李群是群与微分流形的集合.

定义 2.2.1 集合 G 称为 n 维 $C^r(r \geq 2)$ 李群，如果

1. G 是群.
2. G 是 n 维 $C^r(r \geq 2)$ 微分流形.
3. 群的乘法

$$(x, y) \to xy, \quad x, y \in G$$

是

$$G \times G \to G$$

的 C^r 映射.

条件 3 也称为相容条件.

在一个局部坐标系中,若 x^i,y^i 和$(xy)^i$ 分别表示为x,y 和 xy 的坐标,则条件 3 就可以表示为 xy 的坐标作为x 和y 的坐标的函数

$$(xy)^i = \varphi(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n),\quad i = 1,\cdots,n$$

是 C^r 的.

若 $r=\omega$,则称为解析李群.一般的均假设 $r=\infty$,并简称为李群.

由李群的定义,对李群 G 上的任意元素 a,也都可以定义 G 上的左移 L_a 和右移 R_a,并且不难证明,它们都是 G 上的微分同胚,并同样有 $L_a^{-1}=L_{a^{-1}}$,$R_a^{-1}=R_{a^{-1}}$.

比较拓扑群的定义,条件 3 有所不同.但是,对于李群,可以证明映射

$$(x,y)\to xy^{-1},\quad x,y\in G$$

是 C^∞的.这只须证明下列定理.

定理 2.2.1 在李群 G 上,逆射

$$\tau:\quad x\to x^{-1},\quad x\in G$$

是 G 上的微分同胚.

证明 因为 $\tau\circ\tau=$恒同,所以

$$\tau^{-1} = \tau,$$

因此只须证明 τ 是C^∞的.对 G 的任意元素x,左移

$$L_x:\quad y\to xy,\quad y\in G$$

是 G 上的微分同胚.由 $L_x y=xy$,L_x 在y 的切映射

$$(L_x)_y = \frac{\partial(xy)}{\partial y} \tag{2.2.1}$$

不退化,(2.2.1)的右端表示映射的 Jacobi,在局部坐标系中它就可以表示为

$$\left(\frac{\partial(xy)^i}{\partial y^j}\right)=\left(\frac{\partial(L_x y)^i}{\partial y^j}\right).$$

于是,由隐函数存在定理,逆射 τ 作为方程$xy=e$ 的解是C^∞的.

由此定理及相容条件 3 立即可知.

$$(x,y) \to (x,y^{-1}) \to xy^{-1}, \quad xy \in G$$

是 C^{∞} 的,并能得到

推论 2.2.1 李群是拓扑群.

可见,李群是拓扑群的强化,不仅拓扑群的性质李群都具备,它还会有许多更好的性质.例如,李群 G 作为拓扑群,其单位连通分支 G_0 可以由单位的任意一邻域生成,而李群是流形,即局都欧氏的,这样,G_0 可以由单位的一个同胚于欧氏空间的邻域 V 生成,即

$$G_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n,$$

又因为欧氏空间有可数基,所以,G_0 有可数基,这就得到下列定理.

定理 2.2.2 李群的单位连通分支有可数基.

推论 2.2.2 连通的李群有可数基.

李群的一些重要性质将在以下各节中仔细讨论.现在先看一些典型的例子.

例 2.2.1 在任意给定的群 G 上,定义离散的拓扑结构,构成零维的微分流形,称为零维李群.

例 2.2.2 实数域 R 对加法和通常的微分结构成为一个一维李群.

一般的,实数域 R 上的 n 维向量空间对向量的加法和通常的微分结构为一个 n 维李群.

例 2.2.3 圆周是一个一维微分流形,它又可以看成是模 1 的复数乘法群,容易证明,它是一维李群,常记成 T^1 而

$$T^n = \overbrace{T^1 \times \cdots \times T^n}^{n\text{个}}$$

称为 n 维环群,其中维积的意义,对群是直积,对流形则是积流形,并称之为**李群的直积**.显然,T^n 是 n 维李群.

事实上,容易证明下列一般性的结论.

定理 2.2.3 李群的直积是李群.

例 2.2.4 设 V 是实数域上的 n 维向量空间，V 上的全体不退化的线性变换的乘法构成一群，称为 **n 阶线性群**. 记作 $GL(n,R)$. 它可以表示为全体 n 阶非奇阵对矩阵的乘法所成之群. 因此，它又可以看作是 n^2 维欧氏空间 R^{n^2} 的一个开子流形，故为一 n^2 维的微分流形. 由矩阵乘法的定义，相容条件显然成立. 所以，$GL(n,R)$是一个 n^2 维的李群，不难证明，其中行列式为 1 的全体矩阵所成的子群并作为它的子流形构成一个 n^2-1 维的李群，称为 n 阶幺模群，记作 $SL(n,R)$，而由全体 n 阶正交矩阵构成的群称为 **n 阶正交群**，记作 $O(n,R)$，这是一个$\frac{1}{2}n(n-1)$维的紧致李群.

若将实数域 R 换成复数域 C，就得到 n 阶复的一般线性群 $GL(n,C)$，幺模群 $SL(n,C)$和正交群 $O(n,C)$.

例 2.2.5 三维球面 S^3 是一个微分流形，它又可以看成是幺模四元数对乘法所得之群，并构成一个三维李群. 但是，二维球面 S^2 不能成为李群. 这是因为，将李群的单位 e 上的任意一个非零向量左移到群的各点上就得到群上的一个可微的方向场，而 S^2 上却不存在连续的方向场.

例 2.2.6 在实数域 R 上，对通常的微分结构定义乘法

$$(x,y)\to(x^3+y^3)^{1/3},\quad x,y\in R.$$

不难证明，对此乘法成为一群，其单位为 0，任意元素 x 的逆元 $x^{-1}=-x$. 但是，它满足拓扑群的相容条件却不满足李群的相容条件. 所以，对 R 上这样定义的乘法，它构成一个拓扑群却不是李群.

例 2.2.7 在例 2.2.4 中曾经说明，n 阶一般线性群 $GL(n,R)$就是全体 n 阶非奇矩阵对矩阵的乘法所构成之群. 其中元素若表示为矩阵

$$(\delta_i^j+x_i^j),\quad i,j=1,\cdots,n,$$

显然，(x_i^j)也是 $GL(nR)$一个坐标系，在这个坐标系中，单位 e 的坐标为

$$e_i^j = 0, \quad i, j = 1, \cdots, n.$$

并且,若元素 y 的坐标为(y_i^j),则 xy 坐标为

$$(xy)_j^i = x_j^i + y_j^i + x_k^i y_j^k.$$

于是,在单位近旁

$$(xy)_j^i \sim x_j^i + y_j^i,$$

即它们是同阶无穷小量.又由 $xx^{-1}=e$,

$$(x^{-1})_i^j \sim - x_i^j.$$

例 2.2.8 设 G 是 n 维李群,$U:(x^i)$是 G 在单位 e 近旁的坐标系,将在单位 e 的自然标架

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_e, \quad i = 1, \cdots, n,$$

左移到 U 的各点就得到 U 上的标架场

$$L_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_e = \frac{\partial (xy)^j}{\partial y^i}\bigg|_{y=e} \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad x \in U.$$

§3 基本微分式、结构方程

设 G 是 n 维李群,则对 G 中的任一元素 a,都惟一决定 G 上的一个左移,

$$L_a: \quad x \to ax, \quad x \in G.$$

这样就得到群的元素与左移变换之间的一个一一对应,并且对任意的 $a,b \in G$,

$$L_{ba^{-1}} = L_b \circ L_{a^{-1}}.$$

因此,群的运算就可以通过左移表现.

左移在 G 上是单传递的,因为对群 G 上任意到两点 a 和 b,都有惟一的左移 $L_{ba^{-1}}$使

$$L_{ba^{-1}}a = (ba^{-1})a = b.$$

特别,对群 G 上的任一点 a,都有到单位 e 的惟一的左移 $L_{a^{-1}}$,即

$$L_{a^{-1}}a = a^{-1}a = e.$$

于是，$L_a{}^{-1}$在 a 的切映射$(L_a{}^{-1})_a$ 就将 a 点的切向量移到单位 e，也就是由 G 在 a 点的切空间 G_a 到单位 e 的切空间 G 的线性映射

$$(L_a{}^{-1}):\quad G_a \to G_e.$$

因为左移是同胚，它又是非退化的．这就是说，由李群 G 上各点到单位 e 的左移就得到了由各点的切空间到单位的切空间 G_e 的线性同构．

定义 2.3.1　从李群 G 的切丛 $T(G)$ 到单位的切空间 G_e 映射

$$\omega:\quad T(G) \to G_e$$

称为李群 G 的**基本微分式**，它使

$$\mathrm{d}a \to (L_a{}^{-1})_a \mathrm{d}a,\quad \mathrm{d}a \in G_a,$$

即

$$\omega(a,\mathrm{d}a) = (L_a{}^{-1})_a \mathrm{d}a,\quad \mathrm{d}a \in G_a. \tag{2.3.1}$$

由前面的讨论，ω 是由李群 G 的各点的切空间到单位 e 的切空间的非退化的线性映射．$\mathrm{d}a$ 表示在 a 点的一个切向量．这个记号的好处是它明确表示了切向量所在的切空间．于是，$\omega(a,\mathrm{d}a)$ 或 $\omega_a(\mathrm{d}a)$ 就可以简写为 $\omega(\mathrm{d}a)$ 而不致引起混淆．不过，这样的记号又容易与微分记号混淆，需要特别注意．关于切映射的记号，我们又常常忽略映射与它的切映射的区别，常将 $(L_a{}^{-1})\mathrm{d}a$ 或 $(L_a{}^{-1})_*\mathrm{d}a$ 简写为 $L_a{}^{-1}\mathrm{d}a$ 或 $a^{-1}\mathrm{d}a$．这样，(2.3.1)就可以简写为

$$\omega(\mathrm{d}a) = a^{-1}\mathrm{d}a,\quad \mathrm{d}a \in G_a, \tag{2.3.2}$$

或

$$\omega = a^{-1}\mathrm{d}a,\quad \mathrm{d}a \in G_a. \tag{2.3.3}$$

只要在阅读中稍加注意，以上记号均不致引起混乱．

因为 ω 在李群 G 上的每一点都是线性的，所以它是 G 上的取值于 G_e 的一阶微分式．

定理 2.3.1　基本微分式 ω 具有下列性质

1．在单位 e，ω 是恒同映射，即

$$\omega_e = \omega \mid G_e = \text{恒同}$$

或

$$\omega(\mathrm{d}e) = \mathrm{d}e, \quad \mathrm{d}e \in G_e.$$

2. ω 经 G 上的任意左移不变，也简称为左不变的，即对任意的 $s\in G$，

$$L_s^*\omega = \omega,$$

也就是

$$\omega(s\mathrm{d}a) = \omega(\mathrm{d}a)$$

对任意的 $a,s\in G$ 和 $\mathrm{d}a\in G_a$ 成立.

证明 由基本微分式的定义，性质 1 是显然的. 现在证明性质 2.

因为 $s\mathrm{d}a\in G_{sa}$，所以

$$\omega(s\mathrm{d}a) = L_{(sa)^{-1}}(L_s\mathrm{d}a) = L_{a^{-1}s^{-1}}(L_s\mathrm{d}a)$$
$$= L_{a^{-1}s^{-1}}s\mathrm{d}a = L_{a^{-1}}\mathrm{d}a = \omega(\mathrm{d}a).$$

这就证明了性质 2.

下面证明，G 上的具有上述性质的取值于单位的切空间 G_e 的微分式一定是基本微分.

定理 2.3.2 若李群 G 上的一阶微分式

$$\theta:\quad T(G)\to G_e$$

是左不变的，且 θ_e 为恒同，则 θ 必为 G 的基本微分式.

证明 由 θ 左不变，对任意的 $a\in G$.

$$L_{a^{-1}}^*\theta = \theta,$$

特别

$$L_{a^{-1}}^*\theta_e = \theta_a.$$

于是，对任意 $\mathrm{d}a\in G_a$，

$$\theta_a(\mathrm{d}a) = (L_{a^{-1}}^*\theta_e)(\mathrm{d}a) = \theta_e(a^{-1}\mathrm{d}a).$$

又因 θ_e 为恒同，

$$\theta_a(\mathrm{d}a) = a^{-1}\mathrm{d}a, \quad \mathrm{d}a \in G_a,$$

所以 θ 为 G 的基本微分公式.

这个定理说明，基本微分式 ω 是惟一的从 $T(G)$ 到 G_e 的合

于ω_e=恒同的左不变微分式.并且还可以证明,ω 的左不变性是左移的特征,即只有左移使 ω 不变.

定理 2.3.3 李群 G 上保持基本微分式 ω 不变的变换必为左移.

证明 设 σ 是 G 上的变换,即微分同胚

$$\sigma:\quad G\to G,$$

它使

$$x\to\bar{x},\quad x\in G.$$

即 $\bar{x}=\sigma x$,则 σ 在 x 的切映射将在 x 的切向量 $\mathrm{d}x$ 变为在 $\bar{x}$ 的切向量 $\sigma_x\mathrm{d}x$,并记

$$\mathrm{d}\bar{x}=\sigma_x\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}x\in G_x,$$

σ 保持 ω 不变,即

$$\sigma^*\omega=\omega,$$

则对任意的 $x\in G$ 和 $\mathrm{d}x\in G_x$,

$$\omega(\mathrm{d}x)=\omega(\mathrm{d}\bar{x}),\tag{2.3.4}$$

其中 $\bar{x}=\sigma x$.

考虑定义在 $G\times G$ 上的方程

$$\omega(\bar{x})-\omega(x)=0,\tag{2.3.5}$$

其左端可看作是由 $G\times G$ 的每一点$(x,\bar{x})$的切空间到 G_e 的一个线性映射.因为 ω 在 G 的每一点都是非退化的,所以(2.3.5)是 $2n$ 维微分流形$G\times G$ 上的一个 n 维平面场.由(2.3.4),$\bar{x}=\sigma x$ 是(2.3.5)的一个都,即

$$x\to(x,\sigma x),\quad x\in G$$

是这个 n 维平面场经过$(e,\sigma e)$的一个 n 维积分流形.又因为 ω 是左不变的,即 ω 经过任意左移不变,特别经左移 $L_{\sigma e}$不变,所以 $\bar{x}=L_{\sigma e}x$ 也是(2.3.5)的解.而左移是同胚,因此,

$$x\to(x,L_{\sigma e}x),\quad x\in G.$$

也是这个平面场过$(e,\sigma e)$的一个 n 维积分流形.由惟一性,

$$\sigma_x=L_{\sigma e}x$$

对任意 $x\in G$ 成立,所以

$$\sigma = L_{\alpha e},$$

即 σ 为群 G 的左移.

以上讨论说明,左移由基本微分式的不变性完全确定,而群的运算可由左移表现,所以,研究李群的运算只须研究基本微分式 ω.

设 $E_i(i=1,\cdots,n)$是 G_e 中任意取定的一组基,$\omega_i(\mathrm{d}a)$是 $\omega(\mathrm{d}a)$对这组基的坐标,即

$$\omega(\mathrm{d}a) = \omega^i(\mathrm{d}a)E_i, \quad \mathrm{d}a \in G_a.$$

于是,取值于 G_e 的微分 ω 就可以表示为

$$\omega = \omega^i E_i.$$

显然,$\omega^i(i=1,\cdots,n)$就是 G 上的通常的微分式,并且都是左不变的.由于 ω 在群 G 上的每一点 a 都是 G_a 到 G_e 的非退化线性映射,$\omega^1,\cdots,\omega^n$ 在 G 上每一点都是线性无关的.所以 $\omega^i(i=1,\cdots,n)$是 G 上一个左不变的的余切标架场.

设 $\omega^1,\cdots,\omega^n$ 是李群 G 的任一个左不变的余切标架场,则 G 的任意微分式 φ 都可以表示为

$$\varphi = \varphi_i\omega^i,$$

其中 $\varphi_i(x)$是 G 上的函数.

定理 2.3.4 微分 $\varphi=\varphi_i\omega^i$ 是左不变的必须且只须 $\varphi_i(i=1,\cdots,n)$为常数.

证明 充分性显然,现证必要性.因为 φ 是左不变的,即

$$L_s^*\varphi = \varphi \tag{2.3.6}$$

对任意的 $s\in G$ 成立.又由 $\omega^i(i=1,\cdots,n)$的左不变性,则有

$$(L_s^*\varphi_i)\omega^i = \varphi_i\omega^i,$$

所以

$$L_s^*\varphi_i = \varphi_i, \quad i = 1,\cdots,n.$$

这就说明,φ 是左不变的必须且只须所有的 $\varphi_i(i=1,\cdots,n)$都是左不变的,即

$$\varphi_i(sx) = \varphi_i(x), \quad i = 1,\cdots,n.$$

对任意 $s, x \in G$ 成立. 又因为群上的左移是传递的,所以

$$\varphi_i = \text{常数}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

进一步不难证明,李群 G 上的一个 p 次微分式

$$\varphi = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} \varphi_{i_1 \cdots i_p} \varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^{i_p},$$

是左不变的必须且只须它的所有的系数 $\varphi_{i_1 \cdots i_p}$ 都是常数.

于是,李群 G 上的一个左不变的微分式就相当于其单位切空间 G_e 上的一个外形式. 特别,若 θ 是 G 上的一个左不变的取值于 G_e 的一次数分式,则对任意的 $a \in G$ 和 $\mathrm{d}a \in G_a$,

$$\theta(\mathrm{d}a) = \theta_e(a^{-1}\mathrm{d}a) = \theta_e \circ \omega(\mathrm{d}a),$$

即

$$\theta = \theta_e \circ \omega,$$

其中 θ_e 是 G_e 上的取值 G_e 的一次形式,也是 G_e 上的一个线性映射.

显然,李群 G 上的左不变微分形式经线性运算和外积仍保传其左不变性. 并且,其左不变性经外微分运算也不变. 这是因为,若 ω 是左不变的,则对任意的 $s \in G$,

$$L_s^* \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}L_s^* \omega = \mathrm{d}\omega,$$

所以 $\mathrm{d}\omega$ 也是左不变的. 这就说明,李群 G 上的全体左不变微分式是 G 作为微分流形的 Cartan 微分代数的 n 维的子代数.

定理 2.3.5 设 G 是 n 维李群, $\omega = (\omega^i)(i = 1, \cdots, n)$ 是 G 的基本微分式,则必有

$$\mathrm{d}\omega^i = -\frac{1}{2} c^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{2.3.7}$$

其中 C^i_{jk} 为常数,且

$$C^i_{jk} + C^i_{kj} = 0, \quad i, j, k = 1, \cdots, n, \tag{2.3.8}$$

其中(2.3.7)称为 G 的**结构方程**, C^i_{jk} 称为**结构常数**. 并且,其结传常数还满足下列 Jacobi 恒等式,

$$C^i_{jk} C^j_{hl} + C^i_{jh} C^j_{lk} + C^i_{jl} C^j_{kh} = 0, \quad i, k, h, l = 1, \cdots, n. \tag{2.3.9}$$

证明 由于 ω 是左不变的且在每一点不退化, $(\omega^i)(i =$

$1,\cdots,n$)是 G 上的左不变标架场且 $d\omega^i(i=1,\cdots,n)$也是左不变的.因此必有满足(2.3.8)的常数 C^i_{jk}使结构方程(2.3.7)成立.

将结构方程(2.3.7)外微分一次,则有

$$C^i_{jk}d\omega^j\wedge\omega^k-C^i_{jk}\omega^j\wedge d\omega^k=0,$$

再将(2.3.7)代入,就得到

$$C^i_{jk}C^j_{hl}\omega^h\wedge\omega^l\wedge\omega^k-C^i_{jk}C^k_{hl}\omega^j\wedge\omega^h\wedge\omega^l$$
$$=2C^i_{jk}C^j_{hl}\omega^h\wedge\omega^k\wedge\omega^l=0,$$

于是

$$C^i_{j[k}C^j_{hl]}=0,\quad i,k,h,l=1,\cdots,n.\qquad(2.3.10)$$

式中方括号表示其中指标的反称化.再由 C^i_{jk}关于 j 和 k 的反称性,(2.3.10)就化为 Jacobi 恒等式(2.3.9).

须注意,结构常数依赖于 G_e 中基的选取.

现看如何利用局部坐标来计算结构常数.

设 $U:(x^i)$是 n 维李群 G 的单位 e 近旁的一个坐标系,E_i $(i=1,\cdots,n)$是 G_e 上的自然基,即

$$E_i=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_e,\quad i=1,\cdots,n.$$

于是,G 的基本微分式 ω 就可以表示为

$$\omega=\omega^iE_i.$$

由 ω_e 为恒同,

$$\omega_e(E_j)=\omega^i_e(E_j)E_i=E_j,\quad j=1,\cdots,n,$$

于是

$$\omega^i_e(E_j)=\delta^i_j,\quad i,j=1,\cdots,n.\qquad(2.3.11)$$

由此可知,ω^i_e 为 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_e$ 的对偶基,即有

$$\omega^i_e=(dx^i)_e,\quad i=1,\cdots,n.$$

将 $E_i=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_e$ 左移到群 G 的各点上去,得到

$$\underline{E_i}=L_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_e,\quad i=1,\cdots,n.$$

它是 G 上的一个标架场. 又因为

$$\omega^i(\underline{E}_j) = \omega_e^i(E_j) = \delta_j^i, \quad i,j = 1,\cdots,n,$$

所以 (ω^i) 是 $(\underline{E}_i)$ 的对偶标架场. 因此, 当 $x \in U$ 时, 由

$$\underline{E}_i(x) = L_{x*}E_i = L_{x*}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_e$$

$$= \frac{\partial (xy)^j}{\partial y^i}\bigg|_{y=e}\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad i = 1,\cdots,n,$$

就得到

$$\mathrm{d}x^i = \frac{\partial (xy)^i}{\partial y^j}\bigg|_{y=e}\omega^j. \tag{2.3.12}$$

将上式外微分一次, 由 $\mathrm{d}(\mathrm{d}x^i)=0$ 就得到

$$\frac{\partial^2 (xy)^i}{\partial x^k \partial y^j}\bigg|_{y=e}\mathrm{d}x^k \wedge \omega^j - \frac{1}{2}C_{kl}^j\frac{\partial (xy)^i}{\partial y^j}\bigg|_{y=e}\omega^k \wedge \omega^l = 0. \tag{2.3.13}$$

特别, 当 $x=e$ 时, 由 $\omega_e^i = (\mathrm{d}x^i)_e$ 以及

$$\frac{\partial (xy)^i}{\partial y^j}\bigg|_{x=y=e} = \delta_j^i,$$

就有

$$\frac{\partial^2 (xy)^i}{\partial x^k \partial y^j}\bigg|_{x=y=e}(\mathrm{d}x^k)_e \wedge (\mathrm{d}x^j)_e - \frac{1}{2}C_{kl}^i(\mathrm{d}x^k)_e \wedge (\mathrm{d}x^l)_e = 0.$$

因此

$$C_{jk}^i = \frac{\partial^2 (xy)^i}{\partial x^j \partial y^k}\bigg|_{x=y=e} - \frac{\partial^2 (xy)^i}{\partial x^k \partial y^j}\bigg|_{x=y=e}, \quad i,j,k = 1,\cdots,n \tag{2.3.14}$$

或

$$C_{jk}^i = \frac{\partial^2 (xy)^i}{\partial x^j \partial y^k}\bigg|_{x=y=e} - \frac{\partial^2 (yx)^i}{\partial x^j \partial y^k}\bigg|_{x=y=e}. \tag{2.3.15}$$

可见, 结构常数 C_{jk}^i 反映了李群 G 中乘法的不可交换性. 特别, 若 G 是交换时, 则其所有的结构常数为零. 下面的定理将给出一个更为确切的解释.

定理 2.3.6 在 n 维李群 G 的包含单位的坐标系中，单位 e 的坐标 $e^i=0(i=1,\cdots,n)$，则对 e 近旁的 x 和 y，

$$(xy)^i = x^i + y^i + O(r^2), \quad i = 1,\cdots,n, \quad (2.3.16)$$

$$(xyx^{-1}y^{-1})^i = C^i_{jk}x^iy^k + O(r^3), \quad i = 1,\cdots,n. \quad (2.3.17)$$

$$\left(r = \left(\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\right)^{1/2} \sim \left(\sum_{i=1}^{n}(y^i)^2\right)^{1/2}\right).$$

证明 设

$$(xy)^i = f^i(x,y), \quad i = 1,\cdots,n,$$

则有

$$f^i(e,e) = 0, \quad f^i(x,e) = x^i, \quad f^i(e,y) = y^i$$

以及

$$\left.\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right|_{x=y=e} = \delta^i_j, \quad \left.\frac{\partial f^i}{\partial y^j}\right|_{x=y=e} = \delta^i_j,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k}\right|_{x=y=e} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 f^i}{\partial y^j \partial y^k}\right|_{x=y=e} = 0,$$

于是，由 Taylor 公式就得到

$$(xy)^i = x^i + y^i + a^i_{jk}x^iy^k + O(r^3), \quad i = 1,\cdots,n, \quad (2.3.18)$$

其中

$$a^i_{jk} = \left.\frac{\partial^2 (xy)^i}{\partial x^j \partial y^k}\right|_{x=y=e}, \quad i,j,k = 1,\cdots,n.$$

所以

$$(xy)^i = x^i + y^i + O(r^2). \quad (2.3.19)$$

特别，由 $xx^{-1}=e$ 就有

$$(x^{-1})^i = -x^i + O(r^2). \quad (2.3.20)$$

在(2.3.18)中，令 $y=x^{-1}$，则得

$$x^i + (x^{-1})^i + a^i_{jk}x^j(x^{-1})^k + O(r^3) = 0,$$

再利用(3.18)～(3.20)，有

$$(x^{-1})^i = -x^i + a^i_{jk}x^jx^k + O(r^3), \quad i = 1,\cdots,n. \quad (2.3.21)$$

又由于(2.3.18)~(2.3.21),

$$(x^{-1}y^{-1})^i = (x^{-1})^i + (y^{-1})^i + a^i_{jk}(x^{-1})^j(y^{-1})^k + O(r^3)$$
$$= -(x^i + y)^i + a^i_{jk}x^jx^k + a^i_{jk}y^jy^k + a^i_{jk}x^jy^k + O(r^3),$$

于是

$$(xyx^{-1}y^{-1})^i = (xy)^i + (x^{-1}y^{-1})^i + a^i_{jk}(xy)^j(x^{-1}y^{-1})^k + O(r^3)$$
$$= (a^i_{jk} - a^i_{kj})x^jy^k + O(r^3),$$

所以

$$(xyx^{-1}y^{-1})^i = C^i_{jk}x^jy^k + O(r^3), \quad i = 1,\cdots,n.$$

$xyx^{-1}y^{-1}$称为 x 与 y 的交换子.它表现了群的不可交换性.对交换群,$xyx^{-1}y^{-1}$恒为单位.

设 $U:(x^i)$是 n 维李群 G 的单位 e 近旁的一个坐标系,$E_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_e$, $\underline{E}_i = L_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_e$,其基本微分式 $\omega = \omega^i\underline{E}_i$,则由结构方程

$$d\omega^l = -\frac{1}{2}C^l_{hk}\omega^h \wedge \omega^k, \quad i = 1,\cdots,N,$$

就得到

$$d\omega(\underline{E}_i,\underline{E}_j) = -\frac{1}{2}C^l_{hk}\omega^h \wedge \omega^k(\underline{E}_i,\underline{E}_j) = -\frac{1}{2}C^l_{ij}.$$

另一方面,由第一章中的外微分公式(1.6.2),

$$d\omega^l(\underline{E}_i,\underline{E}_j) = \frac{1}{2}(\underline{E}_i(\omega^l(\underline{E}_j)) - \underline{E}_j(\omega^l(\underline{E}_i))$$
$$- \omega^l([\underline{E}_i,\underline{E}_j])) = -\frac{1}{2}\omega^l([\underline{E}_i,\underline{E}_j]),$$

于是

$$\omega^l([\underline{E}_i,\underline{E}_j]) = C^l_{ij}, \quad l,i,j = 1,\cdots,n.$$

又因为 $\omega^l(l=1,\cdots,n)$为 G 上的一个标架场,所以

$$[\underline{E}_i,\underline{E}_j)] = C^l_{ij}\underline{E}_l.$$

§4 李群的李代数

在上一节中,将李群 G 上各点的切向量左移到群的单位上,

就得到 G 的基本微分式.现在,反过来将单位的切向量左移到群的各点上去.因为左移是 C^∞ 同胚,且是单传递的,即在群上的任意一点都有单位到它的惟一的左移.所以,由这样的左移,G_e 上的任意一个切向量 s 就惟一确定 G 上的一个 C^∞ 向量场 $\underline{s}$,即

$$\underline{s}(x) = (L_x)_e s, \quad x \in G, s \in G_e. \tag{2.4.1}$$

$\underline{s}$ 称为 s 的**左移向量场**.(2.4.1)的左端又常简记为 $L_x s$ 或 $x \cdot s$.

左移向量场 $\underline{s}$ 是左不变的.这就是说,$\underline{s}$ 经群 G 上任意的左移变换不变,即

$$L_a \underline{s} = \underline{s}$$

对任意的 $a \in G$ 成立.这是因为,对任意 $a, x \in G$,

$$\begin{aligned}(L_a \underline{s})(x) &= (L_a)_{a^{-1}x} \cdot \underline{s}(a^{-1}x) = (L_a)_{a^{-1}x}(L_{a^{-1}x})_e s_e \\ &= (L_x)_e s = \underline{s}(x).\end{aligned}$$

事实上,$\underline{s}$ 的左不变性从直观上看是显然的.

反之,若 $\underline{s}$ 是李群 G 上的一个左不变向量场,即

$$L_x \underline{s} = \underline{s}, \quad x \in G,$$

于是,$\underline{s}$ 在 x 的值 $\underline{s}(x)$ 即为

$$\underline{s}(x) = (L_x \underline{s})(x) = (L_x)_e s_e,$$

所以 $\underline{s}(x)$ 是由单位上的切向量 s_e 左移得到的,即 $\underline{s}$ 是 $\underline{s}(e)$ 的左移向量场.于是就得到

定理 2.4.1 李群 G 上的向量场是左移向量场必须且只须它是左不变的.

因此,李群 G 上的左不变向量场都是 C^∞ 的.

设 $L(G)$ 是李群 G 上全体左不变向量场的集合.在 $L(G)$ 中,其元素作为向量自然可以进行线性运算和交换子运算.对任意的 $a \in G$, $\underline{X}, \underline{Y} \in L(G)$ 以及任意的实数 λ 和 μ,由定理 2.4.1,

$$L_a(\lambda \underline{X} + \mu \underline{Y}) = \lambda L_a \underline{X} + \mu L_a \underline{Y} = \lambda \underline{X} + \mu \underline{Y},$$

$$L_a[\underline{X}, \underline{Y}] = [L_a \underline{X}, L_a \underline{Y}] = [\underline{X}, \underline{Y}].$$

于是 $\lambda \underline{X} + \mu \underline{Y}$, $[\underline{X}, \underline{Y}] \in L(G)$,即左不变向量场经线性运算和交换子运算其左不变性不变.又由左不变向量场即左移向量场与 G_e

中切向量之间的一一对应关系，它给出

$$G_e \to L(G)$$

的一个线性同构．所以，$L(G)$是一个 n 维的实李代数，它是 G 上全体向量场的李代数 $V(G)$的一个 n 维子代数．

设 $E_1,\cdots,E_n$ 是G_e 中任意取定的一组基，$\underline{E}_1,\cdots,\underline{E}_n$ 是与它们对应的左移向量场，它们在 G 上的每一点都是线性无关的，即$(\underline{E}_i)$是 G 上的一个标架场．并且，由 G_e 到 $L(G)$的线性同构，$\underline{E}_1,\cdots,\underline{E}_n$是 $L(G)$的一组基．

另一方面，对 G_e 中任意取定的一组基 $E_i(i=1,\cdots,n)$，基本微分式 ω 可表示为

$$\omega = \omega^i E_i,$$

其中 $\omega^i(i=1,\cdots,n)$都是左不变的，因为

$$\omega(\underline{E}_j) = E_j = \omega^i(\underline{E}_j)E_i, \quad j = 1,\cdots,n.$$

所以

$$\omega^i(\underline{E}_j) = \delta^i_j, \quad i,j,\cdots,n.$$

即$(\omega^i)(i=1,\cdots,n)$是 G 上与标架场 $\underline{E}_i(i=1,\cdots,n)$对偶的余切标架场．

现在由李群 G 的结构方程来看 $L(G)$的李代数结构．

定理 2.4.2 若 φ 是李群G 上的左不变微分式，$\underline{X}$ 是G 上的左不变向量场，则

$$\varphi(\underline{X}) = \varphi_e(\underline{X}_e),$$

即 $\omega(\underline{X})$为常数．

证明 因为 φ 和$\underline{X}$ 都是左不变的，它们必可表示为

$$\varphi = \varphi_i \omega^i, X = x^j \underline{E}_j,$$

其中 φ_i 和$X^i(i=1,\cdots,n)$都是常数，则由(2.4.1)，

$$\varphi(X) = \varphi_i \omega^i(X^j \underline{E}_j) = \varphi_i X^j \omega^i(\underline{E}_j) = \varphi_i X^i,$$

所以 $\varphi(\underline{X})$为常数．

进一步还不难证明下列结论．

李群 G 上的一个微分式如果在任意左不变向量场的取值均

为常数,则它是左不变的.

李群 G 上的一个向量场,如果任意左不变微分式在这个向量场的取值是常数,则它必为左不变向量场.

定理 2.4.3 设 G 是李群,φ 是 G 上的左不变微分式,$\underline{X}$ 和 $\underline{Y}$ 是 G 上的左不变向量场,则

$$d\varphi(\underline{X},\underline{Y}) + \frac{1}{2}\varphi([\underline{X},\underline{Y}]) = 0. \tag{2.4.2}$$

证明 由第一章中的外微分公式(1.6.2),

$$d\varphi(\underline{X},\underline{Y}) = \frac{1}{2}(\underline{X}\varphi(\underline{Y}) - \underline{Y}\varphi(\underline{X})) - \frac{1}{2}\varphi([\underline{X},\underline{Y}]).$$

由定理 2.4.2,$\varphi(\underline{X})$ 和 $\varphi(\underline{Y})$ 都是常数,所以

$$d\varphi(\underline{X},\underline{Y}) = -\frac{1}{2}\varphi([\underline{X},\underline{Y}]).$$

由公式(2.4.2),对 n 维李群 G 上的基本微分式 $\omega = \omega^i E_i$ 和左移向量场 $\underline{E}_i(i=1,\cdots,n)$,

$$d\omega^i(\underline{E}_j,\underline{E}_k) = -\frac{1}{2}\omega^i([\underline{E}_j,\underline{E}_k]), \quad i,j,k=1,\cdots,n. \tag{2.4.3}$$

另一方面,由李群 G 的结构方程,

$$\begin{aligned} d\omega^i(\underline{E}_j,\underline{E}_k) &= -\frac{1}{2}C^i_{hl}\omega^h \wedge \omega^l(\underline{E}_j,\underline{E}_k) = -\frac{1}{2}C^i_{hl}\delta^h_j\delta^l_k \\ &= -\frac{1}{2}C^i_{jk}, \quad i,j,k = 1,\cdots,n. \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

比较(2.4.3)和(2.4.4)就得到

$$\omega^i([\underline{E}_j,\underline{E}_k]) = C^i_{jk}, \quad i,j,k = 1,\cdots,n.$$

又因为$(\omega^i)(i=1,\cdots,n)$是标架场,所以

$$[\underline{E}_j,\underline{E}_k] = C^i_{jk}\underline{E}_i, \tag{2.4.5}$$

这就是 $L(G)$ 的李代数结构.并且,李代数 $L(G)$ 的 Jacobi 恒等式

$$[[\underline{E}_i,\underline{E}_j],\underline{E}_k] + [[\underline{E}_j,\underline{E}_k],\underline{E}_i] + [[\underline{E}_k,\underline{E}_i],\underline{E}_j] = 0,$$
$$i,j,k = 1,\cdots,n.$$

结构常数在局部坐标系中的计算公式(2.3.14)也可以由

(2.4.5)导出.

设 $U:(x^i)(i=1,\cdots,n)$是 n 维李群 G 在单位 e 近旁的一个坐标系,在 G_e 中取一组基 $E_i=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_e(i=1,\cdots,n)$,经左移得到左不变标架场 $\underline{E_i}(i=1,\cdots,n)$,即有

$$\underline{E_i}(x)=L_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_e=\frac{\partial(xy)^j}{\partial y^i}\bigg|_{y=e}\frac{\partial}{\partial x^j},\quad i=1,\cdots,n.$$

这时

$$[\underline{E_j},\underline{E_k}]=C_{jk}^i\underline{E_i},\quad i,j,k=1,\cdots,n.\qquad(2.4.6)$$

而

$$\begin{aligned}[\underline{E_j},\underline{E_k}]&=\left[L_x\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_e,L_x\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right]\\&=\left[\frac{\partial(xy)^h}{\partial y^j}\bigg|_{y=e}\frac{\partial}{\partial x^h},\frac{\partial(xy)^l}{\partial y^k}\bigg|_{y=e}\frac{\partial}{\partial x^l}\right]\\&=\frac{\partial(xy)^h}{\partial y^j}\bigg|_{y=e}\frac{\partial}{\partial x^h}\left(\frac{\partial(xy)^l}{\partial y^k}\bigg|_{y=e}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}\\&\quad-\frac{\partial(xy)^l}{\partial y^k}\bigg|_{y=e}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial(xy)^h}{\partial y^j}\bigg|_{y=e}\right)\frac{\partial}{\partial x^h},\end{aligned}$$

因为 C_{jk}^i是常数,且$[\underline{E_j},\underline{E_k}]$是左不变的,特别在上式中取 $x=e$,就得到

$$[\underline{E_j},\underline{E_k}]_e=\left(\frac{\partial^2(xy)^l}{\partial x^j\partial y^k}\bigg|_{x=y=e}-\frac{\partial^2(xy)^l}{\partial x^k\partial y^j}\bigg|_{x=y=e}\right)(\underline{E_l})_e,$$

所以

$$C_{jk}^l=\frac{\partial^2(xy)^l}{\partial x^j\partial y^k}\bigg|_{x=y=e}-\frac{\partial^2(xy)^l}{\partial x^k\partial y^j}\bigg|_{x=y=e},\quad i,j,k=1,\cdots,n.$$

这就是(2.3.14).

因为,由 G_e 中任意的向量 X 与由它经左移得到的左不变向量场 $\underline{X}$ 的对应是

$$G_e\to L(G)$$

的线性同构,所以,我们可以自然地将李代数 $L(G)$中的乘法即交

换子运算搬到 G_e 中来，即在 G_e 中定义交换子运算

$$[X,Y]=[\underline{X},\underline{Y}]_e,\quad X,Y\in G_e.$$

这样，G_e 也就成为一个 n 维李代数，称为李群 G 的李代数. 并且，由于左移保持交换子运算，即有

$$\underline{[X,Y]}=[\underline{X},\underline{Y}],\quad X,Y\in G,$$

其中$\underline{[X,Y]}$表示由$[X,Y]$左移得到的向量场. 所以，左移给出了 G_e 到 $L(G)$的一个李代数同构. 由(2.4.6)，在 G_e 中

$$[E_j,E_k]=C^i_{jk}E_i,\quad i,j,k=1,\cdots,n.$$

于是，基本微分式 ω 就是一个取值于李代数 G_e 的一个数分式. 对于取值于任一个 n 维李代数 L 的微分式 ω 和 ψ，对 L 中任意取定的一组基 $E_i(i=1,\cdots,n)$，它们不仅可以自然地表示为

$$\omega=\omega^iE_i,\quad \varphi=\varphi^iE_i,$$

并定义线性运算和外微分运算：

$$\lambda\omega+\mu\varphi=(\lambda\omega^i+\mu\varphi^i)E_i,\quad \lambda,\mu\in R,\tag{2.4.7}$$

$$d\omega=d\omega^iE_i.\tag{2.4.8}$$

我们还可以定义乘积运算：

$$\omega\wedge\varphi=\omega^i\wedge\varphi^j[E_i,E_j],\tag{2.4.9}$$

$\omega\wedge\varphi$ 也称为 ω 与 φ 的外积，或 ω 与 φ 的交换子，也记作$[\omega,\varphi]$.

定理 2.4.4 设 ω 和 φ 分别为 r 和 s 阶的取值于 n 维李代数 L 的微分式，则

$$\omega\wedge\varphi=(-1)^{rs+1}\varphi\wedge\omega,\tag{2.4.10}$$

$$d(\omega\wedge\varphi)=d\omega\wedge\varphi+(-1)^r\omega\wedge d\varphi.\tag{2.4.11}$$

证明 设 $E_i(i=1,\cdots,n)$是 L 中任意取定的一组基，则有

$$\begin{aligned}\omega\wedge\varphi&=\omega^i\wedge\varphi^j[E_i,E_j]=(-1)^{rs+1}\varphi^j\wedge\omega^i[E_j,E_i]\\&=(-1)^{rs+1}\varphi\wedge\omega,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}d(\omega\wedge\varphi)&=d(\omega^i\wedge\varphi^j)[E_i,E_j]\\&=(d\omega^i\wedge\varphi^j+(-1)^r\omega^i\wedge d\varphi^j)[E_i,E_j]\end{aligned}$$

$$=d\omega\wedge\varphi+(-1)^r\omega\wedge d\varphi.$$

须注意，对取值于李代数的微分式，外积的结合律不成立.

定理 2.4.5 设 G 是 n 维李群，ω 是它的基本微分式，则它的结构方程可表示为

$$d\omega=-\frac{1}{2}\omega\wedge\omega, \tag{2.4.12}$$

Jacobi 等式为

$$(\omega\wedge\omega)\wedge\omega=0. \tag{2.4.13}$$

证明 设 $E_i(i=1,\cdots,n)$是 G_e 中的任一组基，则 $\omega=\omega^iE_i$，且有结构方程

$$d\omega^i=-\frac{1}{2}C^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k,\quad i=1,\cdots,n.$$

于是

$$d\omega^iE_i=-\frac{1}{2}C^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^kE_i=-\frac{1}{2}\omega^j\wedge\omega^k[E_j,E_k],$$

这就是

$$d\omega=-\frac{1}{2}\omega\wedge\omega.$$

将上式外微分一次，则有

$$d\omega\wedge\omega-\omega\wedge d\omega=0,$$

于是

$$(\omega\wedge\omega)\wedge\omega-\omega\wedge(\omega\wedge\omega)=0.$$

又由于 $\omega\wedge\omega$ 和 ω 分别为二阶和一阶的，

$$(\omega\wedge\omega)\wedge\omega=-\omega\wedge(\omega\wedge\omega),$$

所以

$$(\omega\wedge\omega)\wedge\omega=0.$$

这就是 Jacobi 等式. 这一事实也可以由外积的定义(2.4.9)直接验证.

例 2.4.1 n 阶一般线性群 $GL(n,R)$可以看成是全体 n 阶非奇矩阵对矩阵的乘法所成之群，它是一个 n^2 维李群. 其李代数 G_e 称为 n 阶线性李代数，并记作 $gl(n,R)$，$gl(n,R)$是一个 n^2

维的向量空间，它可以看成是由全体 n 阶矩阵构成的．设 E_{ij} 是一个 n 阶矩阵，其第 i 行 j 列的元素为 1，其余元素均为 0，显然，全体 $E_{ij}(i,j=1,\cdots,n)$ 构成 $gl(n,R)$ 的一组基．于是，$gl(n,R)$ 中的任意元素 A 就可以表示为

$$A = a^{ij}E_{ij}$$

或

$$A = (a^{ij}).$$

为决定 $gl(n,k)$ 的李代数结构，只须计算其结构常数．设 $x=(x^{ij})$，$y=(y^{ij})\in GL(n,R)$，则

$$xy = ((xy)^{ij}) = \left(\sum_{r=1}^{n} x^{ir}y^{rj}\right).$$

于是，由结构常数的计算公式(2.3.14)，

$$\begin{aligned}
C_{kl,mh}^{ij} &= \left.\frac{\partial^2 (xy)^{ij}}{\partial x^{kl}\partial y^{mh}}\right|_{x=y=e} - \left.\frac{\partial^2 (xy)^{ij}}{\partial x^{mh}\partial y^{kl}}\right|_{x=y=e} \\
&= \left.\frac{\partial^2\left(\sum\limits_{r=1}^{n} x^{ir}y^{rj}\right)}{\partial x^{kl}\partial y^{mh}}\right|_{x=y=e} - \left.\frac{\partial^2\left(\sum\limits_{r=1}^{n} x^{ir}y^{rj}\right)}{\partial x^{mh}\partial y^{kl}}\right|_{x=y=e} \\
&= \sum_{r=1}^{n}(\delta_k^i\delta_l^r\delta_m^r\delta_h^j - \delta_m^i\delta_h^r\delta_k^r\delta_l^j) \\
&= \delta_k^i\delta_m^l\delta_h^j - \delta_m^i\delta_k^h\delta_l^j, \quad i,j,k,l,m,h = 1,\cdots,n.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
[E_{kl},E_{mh}] = C_{kl,mh}^{ij}E_{ij} &= \delta_{lm}E_{kh} - \delta_{hk}E_{ml} \\
&= E_{kl}E_{mh} - E_{mh}E_{kl},
\end{aligned}$$

因此，对 $gl(n,k)$ 中任意元素 $A=(a^{ij})$ 和 $B=(b^{ij})$，

$$\begin{aligned}
[A,B] = [a^{kl}E_{kl},a^{mh}E_{mh}] &= a^{kl}b^{mh}[E_{kl},E_{mh}] \\
&= a^{kl}b^{mh}(E_{kl}E_{mh} - E_{mh}E_{kl}) = AB - BA.
\end{aligned}$$

这就是说，n 阶线性李代数 $gl(n,R)$ 就是由全体 n 阶矩阵对交换子运算

$$[A,B] = AB - BA$$

所成之李代数.

进一步还可以证明,$GL(n,R)$的子群,幺模群 $SL(n,R)$和正交群 $O(n,R)$,它们的李代数 $sl(n,R)$和 $o(n,R)$也是 $gl(n,R)$的子代数,分别由全体迹为零的 n 阶矩阵和全体 n 阶反称矩阵构成.

例 2.4.2 直线 R 上的仿射变换

$$x:\quad R \to R$$

可表示为

$$p \to x^1 p + x^2, \quad p \in R,$$

即

$$x(p) = x^1 p + x^2.$$

其中 x^1 和 x^2 为实数,且 $x^1 \neq 0$,(x^1, x^2)可理解为 x 的坐标,变换 x 和 y 的乘积可定义为

$$(xy)(p) = x(y(p)), \quad p \in R.$$

于是,若 $x = (x^1, x^2)$,$y = (y^1, y^2)$,则有

$$\begin{aligned}(xy)(p) &= x(y(p)) = x(y^1 p + y^2) \\ &= (x^1 y^1)p + x^1 y^2 + x^2.\end{aligned}$$

不难验证,对此乘法,全体仿射变换构成一群.

因此,直线 R 上的仿射变换群可看作在

$$G = \{x = (x^1, x^2) \mid x^1, x^2 \in R, x^1 \neq 0\}$$

中定义乘法

$$\begin{aligned}(xy)^1 &= x^1 y^1, \\ (xy)^2 &= x^1 y^2 + x^2\end{aligned}$$

所成之群,这是一个二维李群.其单位元素 $e = (1,0)$,x 的逆元 $x^{-1} = ((x^1)^{-1}, -x^2(x^1)^{-1})$.由

$$\left(\left.\frac{\partial (xy)^j}{\partial y^i}\right|_{y=e}\right) = \begin{pmatrix} x^1 & 0 \\ 0 & x^1 \end{pmatrix}$$

就得到

$$\underline{E}_1 = L_x\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_e = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1},$$

$$\underline{E}_2 = L_x\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_e = x^1\frac{\partial}{\partial x^2}.$$

它们构成 $L(G)$的一组基.又由

$$[\underline{E}_1,\underline{E}_2] = \left[x^1\frac{\partial}{\partial x^1}, x^1\frac{\partial}{\partial x^2}\right] = x^1\frac{\partial}{\partial x^2} = \underline{E}_2,$$

就得到群 G 的结构常数

$$C_{12}^1 = 0,\quad C_{12}^2 = 1 = -C_{21}^2,$$

其余为零.结构常数也可以由(2.3.14)直接计算:

$$C_{12}^1 = \frac{\partial^1(xy)^1}{\partial x^1\partial y^2}\bigg|_{x=y=e} - \frac{\partial^2(xy)^1}{\partial x^2\partial y^1}\bigg|_{x=y=e} = 0,$$

$$C_{12}^2 = \frac{\partial^1(xy)^2}{\partial x^1\partial y^2}\bigg|_{x=y=e} - \frac{\partial^2(xy)^2}{\partial x^2\partial y^1}\bigg|_{x=y=e} = 1.$$

例 2.4.3 平面 R^2 上的运动

$$x:\quad R^2 \to R^2,$$

它使平面 R^2 上任一点 $p=(p^1,p^2)$变为

$$x(p) = (p^1\cos x^3 - p^2\sin x^3 + x_1, p^1\sin x^3 + p^2\cos x^3 + x^2),\tag{2.4.14}$$

其中 x^1,x^2 和 x^3 为任意实数.于是运动 x 可表示为(x^1,x^2,x^3),并且,运动 $x=(x^1,x^2,x^3)$和 $y=(y^1,y^2,y^3)$的乘积可定义为

$$(xy)(p) = y(x(p)),\tag{2.4.15}$$

并不难验证 R^2 上全体运动对上述乘法构成一群.按此乘法,$(xy)(p)$和 $x(p)$又可表示为 $p\cdot(xy)$和 $p\cdot x$(称为右作用的).由(2.4.14)和(2.4.15),

$$\begin{aligned}
&p\cdot(xy) = (p\cdot x)\cdot y\\
&=(p^1\cos(x^3+y^3) - p^2\sin(x^3+y^3) + y^1 + x^1\cos y^3 - x^2\sin y^3,\\
&\quad p^1\sin(x^3+y^3) + p^2\cos(x^3+y^3) + y^2 + x^1\sin y^3 + x^2\cos y^3),
\end{aligned}$$

因此,平面上的运动群(右作用的)可看作是在

$$G = \{x = (x^1,x^2,x^3) \mid x^1,x^2,x^3 \in R\}$$

定义乘法

$$(xy)^1 = y^1 + x^1\cos y^3 - x^2\sin y^3,$$
$$(xy)^2 = y^2 + x^1\sin y^3 + x^2\cos y^3,$$
$$(xy)^3 = x^3 + y^3$$

所成之群.这是一个三维李群,其单位元素 $e=(0,0,0)$, $x=(x^1, x^2, x^3)$的逆元

$$x^{-1} = (-x^1\cos x^3 - x^2\sin x^3, x^1\sin x^3 - x^2\cos x^3, -x^3).$$

由

$$\left(\frac{\partial(xy)^j}{\partial y^i}\bigg|_{y=e}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x^2 & x^1 & 1 \end{pmatrix},$$

就得到 $L(G)$的一组基

$$\underline{E}_1 = L_x\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_e = \frac{\partial}{\partial x^1},$$

$$\underline{E}_2 = L_x\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_e = \frac{\partial}{\partial x^2},$$

$$\underline{E}_3 = L_x\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)_e = -x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + x^1\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

又由

$$[\underline{E}_1, \underline{E}_2] = \left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right] = 0,$$

$$[\underline{E}_1, \underline{E}_3] = \left[\frac{\partial}{\partial x^1}, -x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + x^1\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3}\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^2} = \underline{E}_2,$$

$$[\underline{E}_2, \underline{E}_3] = \left[\frac{\partial}{\partial x^2}, -x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + x^1\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3}\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^1} = -\underline{E}_1,$$

就得到解 G 的结构常数

$$C_{12}^i = 0 = C_{21}^i, \qquad i = 1,2,3,$$
$$C_{13}^2 = -C_{31}^2 = 1, \quad C_{13}^1 = C_{31}^1 = C_{13}^3 = C_{31}^3 = 0,$$

$$C_{23}^1 = -C_{32}^1 = -1, \quad C_{23}^2 = C_{32}^2 = C_{23}^3 = C_{32}^3 = 0.$$

同样,上述结构常数也可以由(2.3.14)直接计算.

§5 局部李群、基本定理

在前两节中,我们讨论了李群的一些基本性质,其主要内容可以归纳为以下的三个定理,并分别称为李氏第一、第二和第三定理.

定理 2.5.1 在 n 维李群 G 上,存在 n 个左不变的处处线性无关的微分式 $\omega^i(i=1,\cdots,n)$,满足李群的结构方程

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}C_{jk}^i\omega^j \wedge \omega^k, \quad i = 1,\cdots,n. \qquad (2.5.1)$$

其中 $C_{jk}^i = -C_{kj}^i$ 为常数,并且,若 $\omega_e = (\omega^i)_e$ 为恒同,则 ω 就是李群 G 的基本微分式.

定理 2.5.2 在 n 维李群 G 上,全体左不变的向量场对线性运算和交换子运算构成一个 n 维李代数 $L(G)$. 因此,在 G 上必存在 n 个左不变的处处线性无关的向量场即一左不变的标架场 $\underline{E}_i(i=1,\cdots,n)$,使

$$[\underline{E}_j, \underline{E}_k] = C_{jk}^i\underline{E}_i, \quad i = 1,\cdots,n, \qquad (2.5.2)$$

其中 C_{jk}^i 为常数.

定理 2.5.3 任意一个 n 维李群 G 都有一个 n 维李代数 G_e. 并且,由左移就自然地给出 G_e 与 G 的左不变向量场李代数 $L(G)$ 之间的一个李代数同构.

自然会有反过来的问题:

1. 在一个 n 维微分流形 V 中,若有 n 个处处线性无关的微分式,且满足方程(2.5.1),可否在 V 上定义群的运算使 V 成为一个 n 维李群,并以(ω^i)为它的左不变微分式.

2. 在一个 n 维微分流形 V 上,若有标架场 $\underline{E}_i(i=1,\cdots,n)$ 且满足方程(2.5.2),是否可在 V 上定义群的运算使 V 成为一个 n 维李群,并以$(\underline{E}_i)$为它的左不变标架场.

3. 对任意给定的一个 n 维实李群代数，是否存在 n 维李群以它为这个李群的李代数.

回答这些问题的就是李氏第一、第二和第三定理的逆.通常也称为李氏基本定理.由于反过来的问题必然牵涉到微分方程的求解问题，所讨论和解决的问题都是局部的.为此，必须引进局部李群的概念.

定义 2.5.1 设 V 是 n 维 $C^r(r\geqslant 2)$ 流形，e 是 V 中的一点，W 是 $V\times V$ 中点 (e,e) 的一个邻域，若有 W 到 V 的一个 C^r 映射

$$f:\quad W\to V.$$

并将 $(x,y)(\in W)$ 的像 $f(x,y)(\in V)$ 记作 xy，即

$$(x,y)\to xy,\quad (x,y)\in W, xy\in V.$$

满足

1. 若 $(e,y)\in W$，则 $ey=y$.
2. 若 $(x,e)\in W$，则 $xe=x$.
3. 若 $(x,y),(y,z),(xy,z),(x,yz)$ 都在 W 内，则有

$$(xy)z = x(yz).$$

则 V 就称为一个 n 维 r 阶的**局部李群**，上述映射也称为**乘法**，e 也称为**单位**.

一般均假设 $r=+\infty$，并简称为局部李群.

由 $ey=y$，

$$\left(\frac{\partial(xy)}{\partial y}\right)\bigg|_{x=e}$$

为单位矩阵.因此，在 e 近旁，由方程

$$xy = e$$

可惟一地解出 y.同样，由方程

$$zx = e,$$

在 e 近旁可惟一地解出 z.并且，由定义 2.5.1 中的条件 3

$$(zx)y = z(xy),$$

即有

$$ey = ze,$$

又由定义中的条件 1 和 2,

$$y = z.$$

因此,对 e 近旁的任一元素 x,可惟一的定义

$$x^{-1} = y = z$$

使

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e,$$

并称 x^{-1}为 x 的逆元.特别,单位 e 有惟一的逆元 $e^{-1}=e$,因为 $ee=e$.

可见,局部李群与李群的差别只在于乘法定义在单位的近旁.若 $W=V\times V$,则 V 就是李群.因此,李群一些性质,如左移,基本微分式和左不变向量场等概念以及有关的定理对局部李群都成立,只要局限于单位 e 的近旁.

为了证明李氏基本定理,先证明下列一个关键的预备定理.因为所讨论的范围都是局部的,不妨假设 V 是 n 维欧氏空间 R^n 的一个邻域.

定理 2.5.4 在 V 上的 n 个处处线性无关的微分式

$$\omega = (\omega^i), \quad i = 1,\cdots,n$$

是一个 n 维局部李群的左不变余切标架场必须且只须 $V\times V$ 上的全微分方程组:

$$\omega(\bar{x}) - \omega(x) = 0, \quad (x,\bar{x}) \in V\times V \tag{2.5.3}$$

是完全可积的.

证明 必要性.因为 $\omega^i(i=1,\cdots,n)$在每一点都是线性无关的,所以(2.5.3)决定 $2n$ 维微分流形 $V\times V$ 上的一个 n 维平面场.又因为 V 是 n 维的局部李群,且 ω 是左不变的,则过 $V\times V$ 上的任一点(a,b),都有 n 维的积分流形

$$x \to (x,ba^{-1}x),$$

即 $\bar{x}=ba^{-1}x$.所以(2.5.3)是完全可积的.

充分性.因为 $2n$ 维微分流形 $V\times V$ 上的 n 维平面场

$$\omega(\bar{x}) - \omega(x) = 0, \quad (x,\bar{x}) \in V\times V, \tag{2.5.4}$$

是完全可积的,所以若在 V 中任意取定一点 e,则对 V 中任意一

点a,在(e,a)近旁,有过(e,a)的惟一的C^∞积分流形.又因为$\omega^i(i=1,\cdots,n)$在每一点都是线性无关的,所以,这个积分流形可以表示为

$$x \to (x, f(a,x)), \quad x \in V,$$

即

$$\bar{x} = f(a,x), \quad x \in V, \tag{2.5.5}$$

并且

$$a = f(a,e). \tag{2.5.6}$$

将$f(a,x)(\in V)$定义为a与x的乘积ax,即

$$\bar{x} = ax, \quad a,x \in V, \tag{2.5.7}$$

并且,由(2.5.6),

$$ae = a, \quad a \in V. \tag{2.5.8}$$

现在证明,如此定义的乘法,即在(e,e)近旁定义的C^∞映射

$$(a,x) \to ax(\in V), \quad a,x \in V,$$

定义一个n维局部李群,这只须证明,上述乘法满足局部李群的定义中的三个条件.

由(2.5.7),$\bar{x}=ex$是方程(2.5.3)的过(e,e)的n维解,而$\bar{x}=x$是方程(2.5.3)的过(e,e)的一个显然的n维解.由惟一性,在e近旁

$$ex = x,$$

条件1成立.又由(2.5.8),条件2也成立.

由于$\bar{x}=ax$是方程(2.5.3)的解,即V上的映射$x \to ax$保持ω不变,也就是左乘保持ω不变.于是,在e近旁,对任意的a,b,

$$x \to ax \to b(ax)$$

保持ω不变,并且,这时

$$e \to a \to ba,$$

所以

$$\bar{x} = b(ax)$$

是方程(2.5.3)的过(e,ba)的n维解.又因为

$$\bar{x} = (ba)x$$

也是方程(2.5.3)的过(e,ba)的 n 维解.由惟一性,在 e 近旁

$$b(ax)=(ba)x,$$

条件 3 成立.

于是,按上述定义的乘法,在 e 近旁定义了一个 n 维局部李群,其单位为 e,映射 $x\to ax$ 保持 ω 不变,即 ω 是左不变的.

进一步,若 ω_e 是恒同,则 ω 就是这个局部李群的基本微分式.

显然,若 ω 是解析的,则对应的局部李群也是解析的.

定理 2.5.5 设 $\omega^i(i=1,\cdots,n)$是 V 上的n 个处处线性无关的微分式,满足方程

$$d\omega^i=-\frac{1}{2}C^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k,\quad i=1,\cdots,n,\qquad(2.5.9)$$

其中 C^i_{jk}为常数,且

$$C^i_{jk}+C^i_{kj}=0,\quad i,j,k=1,\cdots,n,$$

则 $\omega=(\omega^i)(i=1,\cdots,n)$必为一 n 维局部李群的左不变微分式.

证明 由预备定理 2.5.4,只须证明 $V\times V$ 上的n 维平面场

$$\omega(\bar{x})-\omega(x)=0,\quad(x,\bar{x})\in V\times V,$$

即

$$\omega^i(\bar{x})-\omega^i(x)=0,\quad i=1,\cdots,n\qquad(2.5.10)$$

是完全可积的.由(2.5.9),

$$\begin{aligned}d(\omega^i(\bar{x})-\omega^i(x))&=d\omega^i(\bar{x})-d\omega^i(x)\\&=-\frac{1}{2}C^i_{jk}\omega^j(\bar{x})\wedge\omega^k(\bar{x})-\frac{1}{2}C^i_{jk}\omega^j(x)\wedge\omega^k(x)\\&=-\frac{1}{2}C^i_{jk}\omega^j(\bar{x})\wedge(\omega^k(\bar{x})-\omega^k(x))\\&\quad+\omega^k(x)\wedge(\omega^j(\bar{x})-\omega^j(x)).\end{aligned}$$

由 Frobenius 定理,方程(2.5.10)即(2.5.3)是完全可积的.

这就是李氏第一定理的逆.

由证明的过程可见,定理成立的关键是方程(2.5.9)中的 C^i_{jk}为常数.

由这个定理不难推出李氏第二定理的逆.因为,根据向量场与微分式在每一点的对偶关系,我们可以把向量场的问题转化为微分式.

定理 2.5.6 设 L 是 V 上的一些 C^∞ 向量场对线性运算和交换子运算构成的 n 维实李代数,并且,在每一点 $p\in V$,L_p 都是 n 维的,则 L 必为一 n 维局部李群的左不变向量场的李代数.

证明 设 $\underline{E}_1,\cdots,\underline{E}_n$ 是 n 维李代数 L 的一组基,由定理的假设 $\underline{E}_1,\cdots,\underline{E}_n$ 在 V 上是处处线性无关的,并且

$$[\underline{E}_j,\underline{E}_k]=C^i_{jk}\underline{E}_i,\quad i,j,k=1,\cdots,n,$$

其中 C^i_{jk} 为常数,且

$$C^i_{jk}+C^i_{kj}=0,\quad i,j,k=1,\cdots,n.$$

于是,由

$$\omega^i(\underline{E}_j)=\delta^i_j,\quad i,j=1,\cdots,n,$$

就得到 V 上的 n 个 C^∞ 的微分式 $\omega^1,\cdots,\omega^n$,它们在 V 上的每一点也都是线性无关的.并且,由第一章中的外微分公式(1.6.2),

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega^i(\underline{E}_j,\underline{E}_k)&=\frac{1}{2}(\underline{E}_j\omega^i(\underline{E}_k)-\underline{E}_k\omega^i(\underline{E}_j)-\omega^i([\underline{E}_j,\underline{E}_k]))\\&=-\frac{1}{2}\omega^i(C^l_{jk}\underline{E}_l)=-\frac{1}{2}C^i_{jk}.\end{aligned}$$

因为,$(\underline{E}_j)$和 $\omega^i(i=1,\cdots,n)$在 V 上的每一点都是互为对偶的基,且 $C^i_{jk}=-C^i_{kj}$,所以

$$\mathrm{d}\omega^i=-\frac{1}{2}C^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k,\quad i=1,\cdots,n.$$

由定理 2.5.5,$\omega=(\omega^i)$必为一 n 维局部李群的左不变微分式.于是,$\underline{E}_i(i=1,\cdots,n)$就是这个局部李群的左不变向量场.这也就证明了 L 是这个局部李群的左不变向量场的李代数.

下面证明李氏第三定理的逆.关键是构造适合方程(2.5.9)的微分式 $\omega=(\omega^i)(i=1,\cdots,n)$.

定理 2.5.7 设 L 是一个 n 维实李代数,则必有 n 维局部李群以 L 为它的李代数.

证明 因为 L 是李代数，则 L 中的任一元素 x 都决定 L 到 L 的一个线性映射，记作 $\underline{x}$

$$\underline{x}:\quad L\to L,$$

它使

$$y\to[y,x],\quad y\in L.$$

即 $\underline{x}y=[y,x]$，$[y,x]$ 表示 L 中的换位子运算．显然，$\underline{x}$ 对 x 也是线性的，即

$$\underline{\lambda x+\mu y}=\lambda\underline{x}+\mu\underline{y},\quad x,y\in L,\lambda'\mu\in L.$$

若在 L 中任意取定一组基，$\underline{x}$ 就可以表示为一个 n 阶矩阵．有关运算也可以表示为普通矩阵的运算．

因为 L 是向量空间，$\underline{x}$ 又可以看作为 L 在 x 的切空间 L_x 到 L 的一个线性映射．所以，$\underline{x}$ 可以理解为 n 维微分流形 L 上的取值于 n 维李代数 L 的一个微分式．于是，对任意的 $x\in L$ 和 $t\in R$，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\underline{x}^n$$

在任一个有界区域内是一致收敛的，并记作 $e^{t\underline{x}}$，即

$$e^{t\underline{x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\underline{x}^n,\tag{2.5.11}$$

其中 $\underline{x}^0$ 表示恒同映射，当 $n\geqslant1$ 时 $\underline{x}^n=\overbrace{\underline{x}\circ\cdots\circ\underline{x}}^{n\text{次}}$．令

$$\varphi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\underline{x}^{n-1},\tag{2.5.12}$$

这是定义在 L 上的取值于 L 的解析的一次微分式，且解析地依赖于 t，对 L_x 上任一切向量 $\mathrm{d}x$，$\varphi(t)$ 的值为

$$\varphi(t,\mathrm{d}x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\underline{x}^{n-1}\circ\mathrm{d}x\tag{2.5.13}$$

由(2.5.12)和(2.5.11)

$$\underline{x}\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\underline{x}^n=\mathrm{e}^{t\underline{x}}-1,\tag{2.5.14}$$

即

$$\underline{x}\varphi(t,\mathrm{d}x)=(\mathrm{e}^{t\underline{x}}-1)\circ\mathrm{d}x,\tag{2.5.15}$$

其中"1"表示恒同.习惯地,恒同映射作为微分式也常表示为 $\mathrm{d}x$,这里 $\mathrm{d}x$ 表示微分式,使

$$\mathrm{d}x(X) = X,$$

X 表示在 x 的任意切向量.因此,(2.5.11)也可以写作

$$\underline{x}\varphi = \mathrm{e}^{t\underline{x}} - \mathrm{d}x \tag{2.5.16}$$

用"·"表示对 t 的微商,d 表示在 L 上的微分.于是

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\underline{x}^{n-1} = \mathrm{e}^{t\underline{x}},$$

由(2.5.16)

$$\phi = \underline{x}\varphi + \mathrm{d}x,$$

即

$$\phi = [\varphi, x] + \mathrm{d}x$$

或

$$\phi = \varphi \wedge x + \mathrm{d}x, \tag{2.5.17}$$

于是

$$\begin{aligned}(\varphi \wedge \varphi)^{\cdot} &= \phi \wedge \varphi + \varphi \wedge \phi = 2\phi \wedge \varphi \\ &= 2(\varphi \wedge x) \wedge \varphi + 2\mathrm{d}x \wedge \varphi. \end{aligned} \tag{2.5.18}$$

设 $E_i(i=1,\cdots,n)$是 L 中的一组基,$\varphi = \varphi^i E_i$,$x = x^i E_i$ 它们分别为一次的和零次的微分式.则由 Jacobi 恒等式

$$\begin{aligned}(\varphi \wedge x) \wedge \varphi &= x^j \varphi^i \wedge \varphi^k [[E_i, E_j], E_k] \\ &= -x^j \varphi^i \wedge \varphi^k ([[E_j, E_k], E_i] + [[E_k, E_i], E_j]) \\ &= -(\varphi \wedge x) \wedge \varphi + (\varphi \wedge \varphi) \wedge x,\end{aligned}$$

这就得到

$$2(\varphi \wedge x) \wedge \varphi = (\varphi \wedge \varphi) \wedge x.$$

于是,(2.5.18)就化为

$$(\varphi \wedge \varphi)^{\cdot} = (\varphi \wedge \varphi) \wedge x + 2\mathrm{d}x \wedge \varphi, \tag{2.5.19}$$

再对(2.5.17)作外微分,得到

$$\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\varphi \wedge x - \varphi \wedge \mathrm{d}x,$$

即有

$$(\mathrm{d}\varphi)^{\cdot} = \mathrm{d}\varphi \wedge x - \varphi \wedge \mathrm{d}x. \tag{2.5.20}$$

由(2.5.19)和(2.5.20)就得到

$$\left(\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{2}\varphi\wedge\varphi\right)^{\cdot}=\left(\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{2}\varphi\wedge\varphi\right)\wedge x,$$

即

$$\left(\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{2}\varphi\wedge\varphi\right)^{\cdot}=\underline{x}\left(\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{2}\varphi\wedge\varphi\right).$$

因为 $\underline{x}$ 是 L 上的线性映射,上式说明 $\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{2}\varphi\wedge\varphi$ 作为 t 的函数满足上列齐次线性微分方程. 又由于 $\varphi(0)=0$,则有

$$\left(\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{2}\varphi\wedge\varphi\right)\Big|_{t=0}=0,$$

于是,由解的惟一性

$$\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{2}\varphi\wedge\varphi=0. \qquad (2.5.21)$$

特别,令

$$\omega=\varphi(1),$$

即

$$\omega=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\underline{x}^{n-1}, \qquad (2.5.22)$$

它是 L 上的一个解析的微分式,且满足方程

$$\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2}\omega\wedge\omega=0.$$

即

$$\mathrm{d}\omega^i=-\frac{1}{2}C^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k,\quad i=1,\cdots,n, \qquad (2.5.23)$$

其中 $\omega=\omega^iE_i$, C^i_{jk} 为李代数 L 对基 $E_i(i=1,\cdots,n)$ 的结构常数.

又因为 ω 在 $x=0$ 处为恒同, ω 在 $x=0$ 近旁是不退化的,所以 $\omega=(\omega^i)(i=1,\cdots,n)$ 是0近旁的处处线性无关的解析的微分式,且满足方程(2.5.23). 于是,由定理2.5.5,它在0近旁确定一个 n 维的解析的局部李群,其单位 e 为 O,并以 ω 为它的基式微分式. 这时, ω 的取值空间 G_e 就是 L,群的左移自然地给出 L 与群的左不变向量场李代数之间的同构. 所以, L 就是这个解析的 n

维局部李群的李代数.

定义 2.5.2 从一个局部李群 V 的单位的邻域到另一个局部李群 $\overline{V}$ 的一个 C^∞ 映射称为局部同态,如果它保持乘法.若映射是微分同胚,则称为**局部同构**.两个局部李群称为局部同构的,如果它们之间存在一个局部同构.

因为李群也是局部李群,此定义适用于李群.

设 e 和 $\bar{e}$ 分别为局部李群 V 和 $\overline{V}$ 的单位元素,$\varphi: V\to\overline{V}$ 为局部同态.由于 φ 保持乘法,以及 $ee=e$,则有

$$\varphi(e)\varphi(e) = \varphi(e).$$

所以 $\varphi(e)$ 为 $\overline{V}$ 的单位,即 $\bar{e}=\varphi(e)$,φ 将 V 的单位的邻域映到 $\overline{V}$ 的单位的邻域,φ 在单位的切映射

$$\varphi_e:\quad V_e \to \overline{V}_{\bar{e}}$$

为 V 的李代数 V_e 到 $\overline{V}$ 的李代数 $\overline{V}_e$ 的线性映射.下面进一步证明,φ_e 还保持 V_e 中的换位子运算,即 φ_e 为李代数同态.

定理 2.5.8 局部李群的局部同态在单位的切映射是李代数同态.

证明 设 V 和 $\overline{V}$ 是局部李群,

$$\varphi:\quad V\to\overline{V}$$

为局部同态.由 φ 保持乘法,则 φ 保持左移,即对 V 中任一元素 p,

$$\varphi\circ L_p = L_{\varphi(p)}\circ\varphi.$$

设 X 是 V_e 中任一切向量,它对应 V 中的左移向量场 $\underline{X}$,$\varphi_e X(\in\overline{V}_{\bar{e}})$对应 $\overline{V}$ 中的左移向量场$\underline{\varphi_e X}$.由(2.5.12),

$$\varphi_*\underline{X}_p = \underline{\varphi_e X}_{\varphi(p)},\quad p\in V.$$

又由李群的李代数与它的左不变向量场之间的同构,对任意的 $X,Y\in V_e$ 和 $p\in V$,

$$\begin{aligned}\underline{\varphi_e[X,Y]}_{\varphi(p)} &= \varphi_*(\underline{[X,Y]}_p) = \varphi_*([\underline{X},\underline{Y}]_p)\\ &= [\underline{\varphi_e X},\varphi_e\underline{Y}]_{\varphi(p)} = [\underline{\varphi_e X},\underline{\varphi_e Y}]_{\varphi(p)},\end{aligned}$$

即有

$$\varphi_e[X,Y]=[\varphi_e X,\varphi_e Y],\quad X,Y\in V_e,$$

所以

$$\varphi_e:\quad V_e\to\overline{V}_{\bar{e}}$$

为李代数同态.

由此定理可立即推断,若 φ 是局部同构,则 φ_e 是李代数同构.对局部同构,这个条件也是充分的.为证明这一结论,先证明下面的定理.

定理 2.5.9 设 V 和 $\overline{V}$ 是局部李群,φ 是 V 的单位 e 近旁到 $\overline{V}$ 的单位 $\bar{e}$ 近旁的微分同胚,并不妨设为

$$\varphi:\quad V\to\overline{V},$$

它使 $\varphi(e)=\bar{e}$ 且保持基本微分式不变,即

$$\varphi^*\bar{\omega}=\omega,$$

其中 ω 和 $\bar{\omega}$ 分别为 V 和 $\overline{V}$ 的基本微分式,则 φ 保持左移,即

$$\varphi\circ L_p=L_{\varphi(p)}\circ\varphi,\quad p\in V.$$

证明 因为 $\varphi^*\bar{\omega}=\omega$,且 ω 和 $\bar{\omega}$ 都是左不变的,所以

$$L_p^*\varphi^*\bar{\omega}=L_p^*\omega=\omega=\varphi^*\bar{\omega}=\varphi^*L_{\varphi(p)}^*\bar{\omega}$$

$$=\varphi^*L_{\varphi(p)}^*\varphi^{-1^*}\omega.$$

于是

$$L_p^{*^{-1}}\varphi^*L_{\varphi(p)}^*\varphi^{-1^*}\omega=\omega.$$

即

$$(\varphi^{-1}L_{\varphi(p)}\varphi L_p^{-1})^*\omega=\omega.$$

因此 $\varphi^{-1}L_{\varphi(p)}\varphi L^{-1}$ 是 V 上的保持基本微分式 ω 不变的变换,由定理 2.3.3,$\varphi^{-1}L_{\varphi(p)}\varphi L^{-1}$ 必为 V 上的左移.又因为

$$(\varphi^{-1}L_{\varphi(p)}\varphi L_p^{-1})p=p,$$

所以 $\varphi^{-1}L_{\varphi(p)}\varphi L^{-1}$ 为 V 上的恒同,即有

$$\varphi\circ L_p=L_{\varphi(p)}\circ\varphi,\quad p\in V.$$

此定理的结论也可以表示为下列图表示的交换性,

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L_p} & V \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\varphi \\ \overline{V} & \xrightarrow{L_{\varphi(p)}} & \overline{V} \end{array}$$

定理 2.5.10　局部李群局部同构必须且只须其李代数同构.

证明　必要性是定理 2.5.8 的显然的推论,现在证明充分性.

设 V 和 $\overline{V}$ 为局部李群,其李代数 V_e 和 $\overline{V}_e$ 中取对应的基使它们有相同的结构常数.因此,可不妨设 $V_e=\overline{V}_{\bar{e}}$,且是 n 维的.显然,V 和 $\overline{V}$ 也是 n 维的.

设 ω 和 $\bar{\omega}$ 分别为 V 和 $\overline{V}$ 的基本微分式,它们是取值于同一李代数的微分式,考虑 $V\times\overline{V}$ 上的全微分方程组

$$\bar{\omega}(\bar{x})-\omega(x)=0,\quad (x,\bar{x})\in V\times\overline{V},\tag{2.5.24}$$

因为 ω 和 $\bar{\omega}$ 在 V 和 $\overline{V}$ 的每一点都是不退化的,(2.5.24)决定 $V\times\overline{V}$上的一个 n 维平面场.

因为 ω 和 $\bar{\omega}$ 取值于相同的李代数,则由结构方程,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{\omega}(\bar{x})-\mathrm{d}\omega(x) &= -\frac{1}{2}\bar{\omega}(\bar{x})\wedge\bar{\omega}(\bar{x})+\frac{1}{2}\omega(x)\wedge\omega(X) \\ &= -\frac{1}{2}\bar{\omega}(\bar{x})\wedge(\bar{\omega}(\bar{x})-\omega(x)) \\ &\quad -\frac{1}{2}\omega(x)\wedge(\bar{\omega}(\bar{x})-\omega(x)). \end{aligned}$$

所以(2.5.24)是完全可积的.因此,在$(e,\bar{e})$近旁有过$(e,\bar{e})$的惟一的 n 维解并可表示为

$$\bar{x}=f(x),\quad x\in V,$$

使 $\bar{e}=f(e)$.这是 V 的e 的一个近旁到$\overline{V}$ 的$\bar{e}$ 的一个近旁的一个微分同胚,使

$$\bar{\omega}(\bar{x})=\omega(x),$$

即保持基本微分式不变,

$$f^*\bar{\omega}=\omega.$$

由定理 2.5.9,f 保持左移,因而保持乘法,所以 f 为 V 到 $\overline{V}$ 的局部同构.

§6 法 坐 标

定义 2.6.1 从实数区间$(-\delta,\delta)(\delta>0)$到一个群 G 的映射

$$a:\quad (-\delta,\delta)\to G$$

称为 G 的一个**线段**,如果对任意的 $t,s,t+s\in(-\delta,\delta)$,

$$a(s+t)=a(s)a(t). \qquad (2.6.1)$$

若 $\delta=\infty$,则 a 称为 G 的一个**线群**,即线群

$$a:\quad R\to G$$

是从实数加群到 G 的同态,也称为**单参数群**.

因为

$$a(0)a(0)=a(0),$$

$$a(t)a(-t)=a(-t)a(t)=a(0),$$

所以

$$a(0)=e,$$

即线段的中点在单位,以及

$$a(-t)=(a(t))^{-1},\quad |t|<\delta.$$

定理 2.6.1 群 G 的一个线段可以惟一地扩充为线群.

证明 设

$$a:\quad (-\delta,\delta)\to G$$

是 G 的一个线段,对任意的实数 t 必有正整数 n 使$\left|\frac{t}{n}\right|<\delta$,令

$$\bar{a}(t)=\left(a\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n, \qquad (2.6.2)$$

若又有正整数 m 使$\left|\frac{t}{m}\right|<\delta$,则$\frac{t}{m}$,$\frac{t}{n}$和$\frac{t}{mn}$都在$(-\delta,\delta)$内,并且

$$\left(a\left(\frac{t}{m}\right)\right)^m=\left(\left(a\left(\frac{t}{mn}\right)\right)^n\right)^m$$

$$=\left(\left(a\left(\frac{t}{mn}\right)\right)^m\right)^n=\left(a\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n,$$

即 $\bar{a}(t)$与 n 无关. 于是,$\bar{a}$ 在R 上定义,也就是从 R 到G 的一个映射

$$\bar{a}:\quad R \to G.$$

现在证明 $\bar{a}$ 是G 的一个线群,且是 a 的扩充.

若 $t \in (-\delta, \delta)$,即$|t| < \delta$,则在(2.6.2)中取 $n = 1$ 即得

$$\bar{a}(t) = a(t), \quad |t| < \delta,$$

所以 $\bar{a}$ 是a 的扩充.

又若 $s, t \in R$,可取正整数 n 使 $\left|\frac{t}{n}\right|$, $\left|\frac{s}{n}\right|$和$\left|\frac{s+t}{n}\right|$都小于$\delta$,则

$$a\left(\frac{s+t}{n}\right) = a\left(\frac{s}{n}\right)a\left(\frac{t}{n}\right) = a\left(\frac{t}{n}\right)a\left(\frac{s}{n}\right),$$

于是

$$\begin{aligned}\bar{a}(s+t) &= \left(a\left(\frac{s+t}{n}\right)\right)^n = \left(a\left(\frac{s}{n}\right)a\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \\ &= \left(a\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n\left(a\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n,\end{aligned}$$

所以 $\bar{a}$ 是G 的线群. 又因为 $\bar{a}$ 的定义即(2.6.2)是必要的,$\bar{a}$ 惟一. 这就证明了 $\bar{a}$ 是a 的惟一的扩充.

这个定理通常称为**广延定理**.

设 G 是n 维李群,a: $R \to G$ 是G 的一个线群,则

$$\begin{aligned}a(s+t) &= a(s)a(t) \\ &= L_{a(s)}a(t), \quad s, t \in R.\end{aligned}$$

于是,对任意给定的 $s \in R$,李群 G 的左移

$$L_{a(s)}:\quad G \to G$$

使

$$a(t) \to a(t+s), \quad s, t \in R.$$

假设 $a \in C^1$,则 $L_{a(s)}$的切映射$(L_{a(s)})_{a(t)}$将线群在 $a(t)$的切向量变为它在 $a(t)$的向量. 也就是说,线群在 $a(t+s)$的切向量是它在 $a(t)$的切向量的左移. 因此 $a(s)$在任一点的切向量都是它在单位的切向量的左移. 线群是左移向量场过单位 e 的积分曲

线.因而它一定是 C^∞ 的,这也就证明了 C^1 的线群一定是 C^∞ 的.反之,我们也有下列定理.

定理 2.6.2 李群 G 上任一左移向量场过单位 e 的积分曲线必为线群.

证明 对任意的 $X\in G_e$,它生成 G 上的一个左移的向量场 $\underline{X}$,即

$$\underline{X}_x = (L_x)_e X.$$

于是,由常微分方程的定理,在 e 近旁必有 $\underline{X}$ 的过 e 的惟一的积分曲线,即有惟一的

$$x = g(X,t), \quad |t| < \delta,$$

满足方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \underline{X}_x, \tag{2.6.3}$$

使

$$g(X,0) = e.$$

现在证明,$x=g(X,t)(|t|<\delta)$是 G 的线段.

设$|s|,|t|,|s+t|<\delta$,因为

$$\frac{\mathrm{d}g(X,s+t)}{\mathrm{d}t} = \underline{X}_{g(X,s+t)}(X,s+t)$$

以及当 $t=0$ 时

$$g(X,s+t)|_{t=0} = g(X,s),$$

所以 $g(X,s+t)$是向量场 $\underline{X}$ 过 $g(X,s)$的积分曲线.

又由于 $g(X,t)$是 $\underline{X}$ 的积分曲线且 $\underline{X}$ 是左不变的,$g(X,s)\cdot g(X,t)=L_{g(x,s)}g(X,t)$的切向量是 $g(X,t)$的切向量的左移,所以 $g(X,s)g(X,t)$也是向量场 $\underline{X}$ 的积分曲线,并且当 $t=0$ 时,

$$g(X,s)g(X,t)\Big|_{t=0} = g(X,s).$$

这就证明了,$g(X,s+t)$和 $g(X,s)g(X,t)$都是 $\underline{X}$ 的过 $g(X,s)$的积分曲线,由惟一性

$$g(X, s+t) = g(X, s)g(X, t),$$

即 $g(X,t)$是 G 的线段. 由广延定理,$g(X,t)$可扩充为一线群,即$g(X,t)$可在 R 上定义. 这事实也可以由下面的定理直接说明.

定理 2.6.3 对任意的实数 α,

$$g(X, \alpha t) = g(\alpha X, t).$$

证明 因为 $g(X,\alpha t)$和 $g(\alpha X,t)$都满足方程

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \alpha \underline{X}_x,$$

并且,当 $t=0$ 时,

$$g(X, 0) = e = g(\alpha X, 0),$$

由惟一性

$$g(X, \alpha t) = g(\alpha X, t).$$

因此,由于 $g(X,t)$对任意的 $X \in G_e$ 都有意义,所以 $g(X,t)$ 对任意的 $t \in R$ 有意义.

以上讨论给出了李群 G 的线群与 G 的左不变向量场以及李代数 G_e 中的元素之间的一一对应关系.

令

$$g(x) = g(X, 1), \quad X \in G_e,$$

这就给出定义在 G_e 上的一个映射

$$g: \quad G_e \to G.$$

由定理 2.6.3

$$g(tX) = g(tX, 1) = g(X, t).$$

并由此推得

$$g(0) = e,$$

$$g(-X) = (g(X))^{-1}, \quad X \in G_e.$$

进一步,当 n 为任意正整数时,

$$g(nX) = g(X, n) = g(X, 1 + \cdots + 1) = (g(X))^n,$$

当 n 为负整数时,

$$g(nX) = g(X, n) = g(-X, -n)$$
$$= (g(-X))^{-n} = (g(X^{-1}))^{-n}.$$

总之,我们得到下列定理.

定理 2.6.4 对任意的整数 n,

$$g(nX) = (g(X))^n, \quad X \in G.$$

当 $n<0$ 时,$(g(X))^n=((g(X))^{-1})^{-n}$, $(g(X))^0=e$.

因为

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(tX)\right|_{t=0} = X,$$

即 $g(tX)$在单位 e 的切向量为 X,所以 g 在 0 的切映射 g_0 为恒同.因此

$$g: \quad G_e \to G$$

在 0 近旁为一微分同胚,它就给出了 G 在单位 e 近旁的一个坐标,称为李群 G 的**第一类法坐标,或简称法坐标**.

设 $E_i(i=1,\cdots,n)$为 G_e 中任意取定的一组基,X 的坐标为 $X^i(i=1,\cdots,n)$,即 $X=X^iE_i$,若 $g(X)\in$法坐标域,则其法坐标为 X^i,即

$$g(X)^i = X^i, \quad i = 1,\cdots,n.$$

法坐标的存在表明单位的近旁可以被线段一一地盖上.因为法坐标是由 G_e 中的基决定的,所以法坐标的变换是线性的.

在法坐标系中,$x=tX$ 即 $x^i=tX^i(i=1,\cdots,n)$表示一过 e 线段,它在单位的切向量为 X,在各点的切向量则是 X 的左移 $\underline{X}_x$,于是

$$\omega\left(x,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)= \omega(x,\underline{X}_x) = X,$$

其中 ω 为G 的基本数分式,$x=tX$.令

$$\bar{\omega} = g^*\omega,$$

这是 G_e 上的微分式,这时,沿 G_e 上射线 tX.令

$$\begin{aligned}\bar{\omega}(tX,X) &=(g^*\omega)(tX,X) = \omega(g(tX),g_*X)\\ &=\omega(x,\underline{X}_x) = X.\end{aligned}$$

例 2.6.1 设 $X\in gl(n,R)$,即 X 为一 n 阶矩阵,令

$$\exp X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!},$$

也常简记为 e^X，不难证明，$\exp X$ 是 n 阶的非奇矩阵，即为 $GL(n,R)$中的元素. 因此

$$X \to \exp X, \quad X \in gl(n,R)$$

给出 $gl(n,R)$到 $GL(n,R)$的一个解析映射

$$\exp: gl(n,R) \to GL(n,R),$$

称为**指数映射**，并且，对任意的 $X \in gl(n,R)$，$\exp tX (t \in R)$的切向量

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp tX = (\exp tX)X = \underline{X}_{\exp tX},$$

其中 $\underline{X}$ 是与 X 对应的左移向量场. 特别，

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp tX\right|_{t=0} = X,$$

这就说明，e^{tX}就是 $GL(n,R)$中由 X 决定的线群. 因此，上述指数映射给出群 $GL(n,R)$在单位近旁的法坐标. 所以，前面所定义的映射 g 可以看作是指数映射的推广，通常都统称为**指数映射**.

法坐标在单位近旁定义，因为映射 g 在$0 \in G$ 的近旁是微分同胚. 须注意，虽然 g 在 G_e 上定义，但 g 并不是整体的微分同胚，甚至 g 未必是在上的.

例 2.6.2 设 T 为一维环群，它的李代数 T_e 是一直线，显然，

$$g: \quad T_e \to T$$

为一满映射，但不是同胚，它是一个覆盖映射.

例 2.6.3 二阶幺模群 $SL(2,R)$的李代数 $sl(2,R)$是由全体迹为零的二阶矩阵构成的，即

$$sl(2,R) = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in R \right\},$$

由

$$|\lambda E - X| = \begin{vmatrix} \lambda - a & b \\ c & \lambda + a \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a^2 + bc),$$

可知 X 特征值为 $\pm\beta$ 或 $\pm\beta i$，其中 $\beta=\sqrt{|a^2+bc|}\geqslant 0$。于是，$\exp X$ 的特征值必 $e^{\pm\beta}$ 或 $e^{\pm\beta i}=\cos\beta\pm i\sin\beta$。因此，$\exp X$ 的特征值不可能为不同的负数。这就说明，$sl(2,R)$ 中特征值为不同负数的元素（例如，$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$）必不属于任何线群。所以，指数映射

$$\exp:\quad SL(2,R)\to sl(2,R)$$

不满。

设 $E_i(i=1,\cdots,n)$ 是 G_e 中的一组基，G_e 中的向量 X 在这组基中的坐标为 $X^i(i=1,\cdots,n)$，即 $X=X^iE_i$。令

$$\gamma(X)=\gamma(X^iE_i)=g(X^1E_1)g(X^2E_2)\cdots g(X^nE_n),$$

于是，这也得到从 G_e 到 G 的一个 C^∞ 映射

$$\gamma:\quad G_e\to G,$$

使

$$\gamma(0)=e.$$

因为

$$\left.\frac{\partial\gamma(X)}{\partial X^i}\right|_{X=0}=\frac{\partial}{\partial X^i}(g(X^1E_1)g(X^2E_2)\cdots g(X^nE_n))|_{X=0}$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(tE_i)\right|_{t=0}=E_i,$$

所以，γ 在 0 在切映射 γ_0 为恒同。因此，γ 在 0 近旁也是微分同胚，它也给出 G 在单位 e 近旁的坐标系，在这个坐标系中，

$$(\gamma(X))^i=X^i.$$

γ 称为李群 G 的**第二类法坐标**。

第二类法坐标的存在，表明 G 的单位近旁可以由 n 个线段 $g(tE_i)(i=1,\cdots,n)$ 生成，与第一类法坐标比较，有点类似于通常的平行坐标与极坐标的关系。在第一类法坐标系中，(X^i) 表示 $g(X^1E_1+\cdots+X^nE_n)$，在第二类法坐标系中，(X^i) 表示 $g(X^1E_1)\cdots g(X^nE_n)$。

定理 2.6.5 在法坐标系中，对充分小的 t，

$$g(tX)g(tY) = g(t(X+Y)+O(t^2)), \quad (2.6.4)$$

$$g(tX)g(tY)g(tX)^{-1}g(tY)^{-1} = g(t^2[X,Y]+O(t^3)), \quad (2.6.5)$$

$$g(tX)g(t^2Y) = g(tX+t^2Y+O(t^3)). \quad (2.6.6)$$

证明 设 $x=g(tX), y=g(tY)$,则有 $x^i=tX^i, y^i=tY^i$. 由于 $e^i=0(i=1,\cdots,n)$,根据定理 2.3.6 中的公式(2.3.16)和(2.3.17),

$$\begin{aligned}(xy)^i &= x^i+y^i+O(r^2)\\ &= t(X^i+Y^i)+O(t^2),\\ (xyx^{-1}y^{-1})^i &= C^i_{jk}x^jy^k+O(r^3) = C^i_{jk}X^jY^kt^2+O(t^3)\\ &= [X,Y]^it^2+O(t^3).\end{aligned}$$

再按照 g 的定义就得到(2.6.4)和(2.6.5).

为证明(2.6.6),令 $x=g(tX), y=g(t^2Y)$,即有 $x^i=tX^i$, $y^i=t^2Y^i$. 再由(2.3.18)

$$\begin{aligned}(xy)^i &= x^i+y^i+a^i_{jk}x^jy^k+O(r^3)\\ &= tX^i+t^2Y^i+a^i_{jk}X^jY^kt^3+O(t^3)\\ &= tX^i+t^2Y^i+O(t^3),\end{aligned}$$

(2.6.6)成立.

§7 同态、交换李群

定义 2.7.1 从李群 G 到李群 $\bar{G}$ 的一个 C^∞ 映射

$$\varphi:\quad G\to\bar{G}$$

称为一个**李同态**,也简称为**同态**,如果它保持群的乘法,即

$$\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b),\quad a,b\in G.$$

若 φ 是微分同胚,则它称为**李同构**,也简称为**同构**. 显然,对李同态 $\varphi:\quad G\to\bar{G}$,

$$\varphi(e)=\bar{e},$$

其中 e 和 $\bar{e}$ 分别为 G 和 $\bar{G}$ 的单位,以及

$$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}, \quad a \in G.$$

例 2.7.1 李群 G 的一个线群

$$a: \quad R \to G$$

就是从实数加群 R 到李群G 的一个李同态.

设 G 是一维李群,由李群的法坐标的存在,一维李群在单位近旁的乘法可以表现为法坐标的加法.可见,一维李群 G 局部同构于实数加群R.又由广延定理,这个局部同构 g 可以扩充为R到G 的一个同态.

定理 2.7.1 连通的一维李群 G 必同构于实数加群 T^1 或模 1 的实数加群即一维环群 T^1.

证明 因为指数映射

$$g: \quad R \to G$$

是同态,且是局部同构,所以,$g(R)$是 G 的连通开子群.又因为 G 是连通的,于是

$$g(R) = G,$$

即 g 是在上的.

若 g 核为零,则 g 为群的同构.又因为 g 为局部同胚且G 连通,所以 g 是 R 到G 的李同构.

若 g 核不为零,即 g 核中除 0 以外还有其他元素.因为 g 是局部同构,故 g 在 0 的一个近旁为同胚,所以,在 0 的这个近旁没有 g 核中的其他的元素.因此,必有 $\varepsilon>0$,使$(-\varepsilon,\varepsilon)$中除 0 以外没有 g 核中其他元素.又因为 g 核是R 中的闭集,于是必有 g 核中的最小正数α.这样,g 核中的任意元素β就可以表示为

$$\beta = n\alpha + r,$$

其中 n 为整数,$0\leqslant r<\alpha$.又由于 g 是同态,且 $g(\beta)=e=g(\alpha)$,即有

$$e = g(\beta) = g(n\alpha)g(r) = g(\alpha)^n g(r) = g(r),$$

因此 $r\in g$ 核.又由 α 是g 核中最小正数的假设,必有 $r=0$,从而得到 $\beta=n\alpha$,即 g 核中的元素必是 α 的整数倍.反之,对任意的整数 n,必有 $n\alpha\in g$ 核,即

$$g\text{ 核} = \{n\alpha \mid n \text{ 为整数}\}.$$

这就说明,g 核是整数加群. 于是,G 与 R/g 核即一维环群 T^1 同构. 又由于 g 是局部同构且 G 连通的,所以,g 给出 T^1 到 G 的李同构. 定理得证.

由于实数加群 R 和环群 T^1 都是交换李群,则立即可得下列定理.

定理 2.7.2 一维的连通李群是交换的.

上一节中曾经证明,李群的 C^1 的线群是 C^∞ 的,现在证明,李群的连续的线群一定是 C^∞ 的.

定理 2.7.3 从实数加群 R 到李群 G 的连续同态一定是 C^∞ 的.

证明 设

$$\varphi:\quad R \to G$$

是连续同态. 不妨设 $\varphi([-1,1])$ 包含在 G 的一个法坐域中,在这个法坐标域中,指数映射

$$g:\quad G_e \to G$$

是微分同胚,于是,g^{-1} 存在.

设 m 和 n 是任意的非零整数,由 φ 是同态,

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m,$$

又因为 $\frac{1}{n} \in [-1,1]$,即有 $\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ 在 G 的上述的法坐标域中,所以

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = g \circ g^{-1} \circ \varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

于是

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{m}{n}\right) &= \left(g\left(g^{-1} \circ \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^m \\ &= g\left(mg^{-1} \circ \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right).\end{aligned} \tag{2.7.1}$$

特别,令 $m = n$,则有

$$\varphi(1) = g\left(ng^{-1} \circ \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

并得到

$$g^{-1}\circ\varphi(1)=ng^{-1}\circ\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$

或

$$g^{-1}\circ\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}g^{-1}(\varphi(1)),\qquad(2.7.2)$$

将(2.7.2)代入(2.7.1),上得到

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=g\left(\frac{m}{n}g^{-1}(\varphi(1))\right).\qquad(2.7.3)$$

由于(2.7.3)对任意的整数 m 和 n 成立,φ 和 g 都是连续的,所以对任意的实数 t,

$$\varphi(t)=g(tg^{-1}(\varphi(1))).$$

又由于 g 是 C^∞ 的,所以 φ 也是 C^∞ 的,这就证明了李群 G 中的连续的线群是 C^∞ 的.

定理 2.7.4 从李群 G 到李群 $\overline{G}$ 的连续同态是 C^∞ 的.

证明 设

$$\varphi:\quad G\to\overline{G}$$

是连续同态,现在证明,φ 是 C^∞ 的.因为,李群上的任意一点都可以左移到单位,而左移是 C^∞ 的,且 φ 保持左移,所以只须证明 φ 在单位近旁是 C^∞ 的.特别,只须在一个坐标域中证明.

设 G 是 n 维李群,$E_i(i=1,\cdots,n)$ 是 G_e 是任意取定的一组基,因为 φ 是连续同态,所以

$$t\to\varphi\circ g(tE_i),\quad i=1,\cdots,n,t\in R.$$

是 $\overline{G}$ 中的连续的线群,由定理 2.7.3,它是 C^∞ 的线群.因此,必有 $\overline{E}_i\in\overline{G}_e$,使

$$\varphi(g(tE_i))=\bar{g}(t\overline{E}_i),\quad i=1,\cdots,n.$$

$\bar{g}(tE_i)$ 是 t 的 C^∞ 函数,其中 $\bar{g}:\overline{G}_e\to\overline{G}$ 的指数映射.由第二类法坐标的存在,在法坐标域中,任意元素 x 可惟一地表示为

$$x=g(X^1E_1)g(X^2E_2)\cdots g(X^nE_n),$$

其中 $(X^i)(i=1,\cdots,n)$ 为 X 的第二类法坐标.于是

$$\varphi(x) = \varphi(g(X^1E_1)\cdots g(X^nE_n))$$
$$= \varphi(g(X^1E_1))\cdots\varphi(g(X^nE_n))$$
$$= \bar{g}(X^1\bar{E}_1)\cdots\bar{g}(X^n\bar{E}_n),$$

所以 φ 是(X^i)即 x 的C^∞函数.这就证明了 φ 在e 近旁是C^∞的.

若 G 和$\bar{G}$ 都是解析李群,则 g 和$\bar{g}$ 都是解析的,于是 φ 也是解析的,这就是说,解析李群之间的连续同态是解析的.

若两个李群作为拓扑群是一致的,则恒同映射是连续的同构.由定理 2.7.1,它必为微分同构,即这两个李群是一致的,这也就说明了下列定理.

定理 2.7.5 李群微分结构由它的拓扑惟一确定.

定理 2.7.6 设 G 和$\bar{G}$ 李群,e 和$\bar{e}$ 分别是G 和$\bar{G}$ 的单位,

$$\varphi:\quad G \to \bar{G}$$

是李同态,则

$$\varphi_e:\quad G_e \to \bar{G}_{\bar{e}}$$

是李代数同态,并且

$$\varphi \circ g = \bar{g} \circ \varphi_e,$$

即下列图表交换

$$\begin{array}{ccc} G_e & \xrightarrow{\varphi_e} & \bar{G}_{\bar{e}} \\ \downarrow g & & \downarrow \bar{g} \\ G & \xrightarrow{\varphi} & \bar{G} \end{array}$$

其中 g 和$\bar{g}$ 是指数映射.

证明 因为李群是局部李群,李同态也是局部同态,由本章§5 中的定理 2.5.8,$\varphi_e: G_e \to \bar{G}_{\bar{g}}$为李代数同态.

设 $X \in G_e$ 则$g(tX)$是 G 中的线群,即

$$t \to g(tX),\quad t \in R$$

是实数加群 R 到G 的同态,又因为 φ 是同态,所以

$$t \to \varphi \circ g(tX),\quad t \in R$$

是 R 到$\bar{G}$ 的同态,即 $\varphi \circ g(tX)$是 $\bar{G}$ 中的线群.于是,必有 $\bar{X} \in$

$\bar{G}_{\bar{e}}$,使

$$\varphi \circ g(tX) = \bar{g}(t\bar{X}), \quad t \in R.$$

并且

$$\bar{X} = \varphi_e X,$$

于是

$$\varphi \circ g(tX) = \bar{g}(t\varphi_e X) = \bar{g} \circ \varphi_e(tX)$$

对任意的 $X \in G$ 和 $t \in R$ 成立,所以

$$\varphi \circ g = \bar{g} \circ \varphi_e.$$

以下讨论交换李群的结构.

定理 2.7.7 设 G 是交换李群,

$$g: \quad G_e \to G$$

是指数映射,则有

$$g(X + Y) = g(X)g(Y), \quad X, Y \in G_e.$$

证明 因为 G 是交换的,则对任意的 $X, Y \in G_e$ 和任意的实数 s 和 t,

$$\begin{aligned} g(sX)g(sY)g(tX)g(tY) &= g(sX)g(tX)g(sY)g(tY) \\ &= g((s + t)X)g(tX)g((s + t)Y), \end{aligned}$$

所以

$$g(tX)g(tY)$$

是 G 中的线群,并且,它在单位的切向量为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(tX)g(tY))\bigg|_{t=0} = R_e X + L_e Y = X + Y.$$

因此

$$g(tX)g(tY) = g(t(X + Y)).$$

特别,当 $t = 1$ 时就得到

$$g(X + Y) = g(X)g(Y), \quad X, Y \in G_e.$$

G_e 作为 n 维向量空间对向量的加法成一 n 维李群,以上定理说明,若 G 交换,则

$$g: \quad G_e \to G$$

为李同态.

为讨论交换李群的结构,需要下面的定理.

定理 2.7.8 若 K 是 n 维向理空间 R^n 的离散非零闭子群,则有 R^n 中的线性无关的向量 $e_1,\cdots,e_p$,使 K 为 $e_\alpha(\alpha=1,\cdots,p)$ 的整系数的线性组合,即

$$K=\left\{\sum_{\alpha=1}^{p}q_\alpha e_\alpha \mid q_\alpha\in Z\right\},$$

其中 Z 为整数的集合.

证明 对 n 作归纳法.

当 $n=1$ 时,在定理 2.7.1 的证明中已经证明结论成立.

当 $n>1$,在 R^n 中任取一欧氏度量.由 K 是离散的闭集,则 K 中非零元素必达到最小模,即有 K 中的非零元素 e_1 使

$$|e_1|\leqslant|x| \tag{2.7.4}$$

对 K 中的所有非零元素 x 成立.因为 $0\in K$,且 K 离散,则必有以 0 为中心,$\varepsilon(>0)$为半径的球域 $U(0,\varepsilon)$,其中无 K 的非零元素,所以

$$|e_1|\geqslant\varepsilon>0.$$

设 Re_1 是 R^n 中由 e_1 生成的子空间,即 $Re_1=\{xe_1|x\in R\}$,则 $R_{e_1}\cap K$ 中的元素必可表示为

$$xe_1=[x]e_1+re_1,$$

其中$[x]$是 x 的整数部分,$0\leqslant r<1$,由 K 是子群,则$[x]e_1\in K$,所以

$$re_1\in R,$$

并且

$$|re_1|=r|e_1|<|e_1|.$$

由(2.7.4),必有 $r=0$,即 x 为整数,于是

$$Re_1\cap K=\{me_1\mid m\in Z\},$$

也就是 Ze_1,其中 Z 表示整数的集合,而 K/Ze_1 又是 R^{n-1}的离散子群.由归纳法,定理得证.

定理 2.7.9 连通的交换李群一定是向量空间与环群的直积，也就是一些直线和圆周的直积.

证明 设 G 是 n 维连通的交换李群，由定理 2.7.6，指数映射

$$g: \quad G_e \to G$$

是李同态. 于是，$g(G_e)$是 G 的子集，又因为 g 是局部同胚且 G_e 是连通的，所以，$g(G_e)$是 G 的连通开子群. 又由 G 是连通的假设，必有 $g(G_e)=G$，即指数映射 g 是在上的，并从而有

$$G = G_e/g\text{ 核}.$$

这里的 G_e 是 n 维向量空间对向量的加法所成之群，即 $G_e=R^n=\overbrace{R\times\cdots\times R}^{n}$，$R$ 为实数加群，即有 $G=R^n/g$ 核.

若 g 核$=0$，则群

$$G \doteq R^n.$$

若 g 核$\neq 0$，由于 g 在 0 近旁为同胚，则在这个近旁除 0 外无其他核元，因此，g 核是离散的，即 g 核是G_e 的非零的离散正规闭子群. 由定理 2.7.8，

$$g\text{ 核} = \left\{\sum_{\beta=1}^{p} q_\beta e_\beta \,\middle|\, q_\beta \in Z\right\},$$

其中 $e_\beta(\beta=1,\cdots,p)$是 G_e 中的一组线性无关的向量. 因此，群

$$G = G_e/g\text{ 核} = R^n/\left\{\sum_{\beta=1}^{p} q_\beta e_\beta \,\middle|\, q_\beta \in Z\right\}$$

$$= \overbrace{T^1\times\cdots\times T^1}^{p}\times\overbrace{R\times\cdots\times R}^{n-p}$$

$$= T^p \times R^{n-p}.$$

于是就有

$$g: \quad T^p \times R^{n-p} \to G.$$

它是群的同构且是局部微分同胚，所以 g 是李同构，即有李群

$$G \cong T^p \times R^{n-p}.$$

由此定理立即可得下列推论.

定理 2.7.10 n 维连通的紧致交换李群必为 n 维环群.

定义 2.7.2 拓扑群 G 的一个元素 a 称为 G 的一个生成元,如果由它生成的巡回群

$$\{a^k \mid k \text{ 是整数}\}$$

在 G 中是稠密的.

由数论中一个重要的定理,即若 $1,\beta_1,\cdots,\beta_n$ 在有理系数域上是线性无关的,则点集

$$\{(\{k\beta_1\},\cdots,\{k\beta_n\} \mid k \text{ 为整数})\}$$

在 n 维单位正方体 $\{x_i \mid 0\leqslant x_i\leqslant 1, i=1,\cdots,n\}$ 中是稠密的,其中 $\{k\beta_i\}(i=1,\cdots,n)$ 表为 $k\beta_i$ 的小数部分. 由此结果就可以得到下面定理

定理 2.7.11 环群 T^n 有生成元.

事实上,$(e^{2\pi\beta_1 i},\cdots,e^{2\pi\beta_n i})$ 都是生成元.

§8 伴随表现

定义 2.8.1 n 维李群 G 到 k 阶线性群 $GL(k,R)$ 的一个同态

$$\alpha:\quad G\rightarrow GL(k,R)$$

称为 G 的一个 k 阶表现,如果 α 是连续的.

由上一节的定理 2.7.4,α 一定是 C^∞ 的,因此 α 为李同态.

对任意的 n 维李群,都有一个自然的 n 阶表现,这就是它的**伴随表现**,并且,由李群的伴随表现又诱导出它的李代数的一个 n 阶表现,也称为李代数的伴随表现. 为阐明李群和它的李代数的伴随表现以及它们之间的关系,先讨论李群 G 的左、右移以及由它们定义的基本微分式之间的关系.

定义 2.8.2 定义在李群 G 的切丛 $T(G)$ 上的取值于 G_e 的微分式

$$\tilde{\omega}:\quad T(G)\rightarrow G_e$$

称为李群 G 的**右基本微分式**,它使

$$da \to (R_{a^{-1}})_a da, \quad a \in G, da \in G_a,$$

即

$$\tilde{\omega}(da) = (R_{a^{-1}})_a da, \quad a \in G, da \in G_a, \quad (2.8.1)$$

其中$(R_{a^{-1}})_a$ 是右移$R_{a^{-1}}$在 a 的切映射,(2.8.1)的右端也常简记作 $R_{a^{-1}}da$ 或 $da \cdot a^{-1}$,即

$$\tilde{\omega}(da) = (R_{a^{-1}})da = da \cdot a^{-1}.$$

我们也常将§3 中它定义的基本微分式称为**左基本微分式**.

不难证明,$\tilde{\omega}$ 有与左基本微分式 ω 类似的下列性质.

1. $\tilde{\omega}$ 是右不变的,即

$$R_s^* \tilde{\omega} = \tilde{\omega}, \quad s \in G.$$

2. $\tilde{\omega}$ 在 G_e 上为恒同,即 $\tilde{\omega}_e = \tilde{\omega} | G_e$ 为恒同,也就是说

$$\tilde{\omega}(de) = de, \quad de \in G_e.$$

并且,$\tilde{\omega}$ 可由上述性质刻画,即 G 上的具有上述性质的取值于 G_e 的微分式必为$\tilde{\omega}$.

设 G 是 n 维李群,群 G 上的乘法

$$(a, b) \to ab, \quad a, b \in G$$

是 $G \times G$ 到 G 的 C^∞映射

$$\varphi: \quad G \times G \to G$$

对任意的 $a, b \in G$ 和 $da \in G_e, db \in G_b$. φ 在(a, b)的切映射

$$\varphi_*: \quad (a \times G)_{(a,b)} \to G_{ab}$$

将 $G \times G$ 在(a, b)的切向量(da, db)变为 G 在点 ab 的一个切向量,记作 $d(ab)$,即

$$d(ab) = \varphi_*(da, db),$$

由于映射 φ 的 Jacobi 为

$$\left(\frac{\partial(ab)}{\partial a}, \frac{\partial(ab)}{\partial b}\right),$$

因此

$$d(ab) = (R_b)_a da + (R_a)_b db, \quad a, b \in G, \quad (2.8.2)$$

或简写为

$$d(ab) = da \cdot b + a \cdot db, \quad a, b \in G. \tag{2.8.3}$$

$\{(a, a^{-1}) \mid a \in G\}$是$G \times G$的$n$维子流形，在上述映射下，它的像是$G_e$中的单位$e$，于是，由(2.8.3)，

$$da \cdot a^{-1} + a \cdot da^{-1} = 0, \quad a \in G,$$

其中

$$da^{-1} = \tau_a da, \quad a \in G.$$

τ_a是G上的逆射τ在a点的切映射，并由此得到

$$\tau_a da = -a^{-1} \cdot da \cdot a^{-1}$$

或

$$da^{-1} = -a^{-1} \cdot da \cdot a^{-1}.$$

因此

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(da) &= da \cdot a^{-1} = -(L_a)_{a^{-1}}(\tau_a da) \\ &= -\omega(\tau_a da) = -\tau_a^* \omega(da), \quad a \in G, da \in G_a, \end{aligned}$$

这就得到左右基本微分式之间的关系

$$\tilde{\omega} = -\tau^* \omega.$$

又由群G的结构方程，

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega} &= -d(\tau^* \omega) = -\tau^* d\omega \\ &= \frac{1}{2}\tau^*(\omega \wedge \omega) = \frac{1}{2}(\tau^* \omega) \wedge (\tau^* \omega) \\ &= \frac{1}{2}\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}. \end{aligned}$$

这就得到李群G用右基本微分式表示的结构方程，

$$d\tilde{\omega} = \frac{1}{2}\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}. \tag{2.8.4}$$

若在G_e中任取一组基$E_i (i = 1, \cdots, n)$，$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}^i E_i$，则(2.8.4)又可以表示为

$$d\tilde{\omega}^i = \frac{1}{2} C^i_{jk} \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k, \quad i = 1, \cdots, n,$$

其中$C^i_{jk} = -C^i_{kj}$为结构常数.

设a是李群G中的任一元素，则由它决定G上的一个内自

同构

$$A(a):\quad G\to G,$$

使

$$x\to axa^{-1},\quad x\in G,$$

即

$$A(a)x=axa^{-1}.$$

显然

$$A(a)=R_a^{-1}\circ L_a=L_a\circ R_a^{-1},$$

因此 $A(a)$是 G 上的微分同胚,即 $A(a)$为一李同构.

由于 $A(a)e=e$,$A(a)$在 e 的切映射$(A(a))_e$ 是 G_e 上的一个线性自同构,并记作 $\alpha(a)$,即

$$\alpha(a):\quad G_e\to G_e$$

为线性同构. 因此,$\alpha(a)$是 n 阶线性群 $GL(n,R)$中的元素,即 $\alpha(a)\in GL(n,R)$. 于是得到映射

$$\alpha:\quad G\to GL(n,R).$$

因为,对任意的 $a,b,x\in G$,

$$\begin{aligned}A(ab)\cdot x&=abx(ab)^{-1}=abxb^{-1}a^{-1}\\&=A(a)\cdot A(b)x,\end{aligned}$$

即有

$$A(ab)=A(a)\cdot A(b),\quad a,b\in G.$$

从而得到

$$\alpha(ab)=\alpha(a)\circ\alpha(b),\quad a,b\in G.$$

这就说明,

$$\alpha:\quad G\to GL(n,R)$$

为一同态. 又因为 $\alpha(a)$对 a 连续,所以 α 是 G 的一 n 阶表现,称为 G 的**伴随表现**,也常记作 Ad.

于是,对任意的 $a\in G$ 和 $\mathrm{d}a\in G_a$,

$$\tilde{\omega}(\mathrm{d}a)=\mathrm{d}a\cdot a^{-1}=a\cdot a^{-1}\mathrm{d}a\cdot a^{-1}=a\omega(\mathrm{d}a)a^{-1},$$

即有

$$\tilde{\omega}(\mathrm{d}a)=\alpha(a)\cdot\omega(\mathrm{d}a),\quad a\in G,\mathrm{d}a\in G_a.$$

这就说明,将解 G 上任一点 a 的任意切向量 da 左移到单位和右移到单位相差一个 G_e 上的一个线性自同构 $\alpha(a)$.

由于 α: $G\to GL(n,R)$是李同态,所以,它在单位的切映射

$$\alpha_e: \quad G_e \to gl(n,R)$$

是李代数同态.这是 n 维李代数 G_e 到 n 阶线性李代数的一个同态,也就是 G_e 的一个阶表现,称为 G_e 的伴随表现,也常记作 ad.

对任意的 $X\in G_e$,$\alpha_e(X)\in gl(n,R)$.于是,$\alpha_e(X)$可看作是 n 维向量空间 G_e 上的一个线性映射.现在看 $\alpha_e(X)$在 G_e 上的作用.

定理 2.8.1 设 G 是李群,α 是它的伴随表现,α_e 是 G 的李代数 G_e 的伴随表现,则对任意的 $X,Y\in G_e$,线性映射

$$\alpha_e(X): \quad G_e \to G_e$$

使

$$\alpha_e(X)\cdot Y = [X,Y]. \tag{2.8.5}$$

证明 自然的考虑是通过法坐标将问题回到李群.设 g 和 $\bar{g}$ 分别为 G 和 $GL(n,R)$的法坐标,即有指数映射

$$g: G_e \to G$$

和

$$\bar{g}: \quad gl(n,R) \to GL(n,R).$$

由定理 2.7.6,下列图表示交换:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{A(a)} & G \\ g\uparrow & & \uparrow g \\ G_e & \xrightarrow{\alpha(a)} & G_e \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha} & GL(n,R) \\ g\uparrow & & \uparrow \bar{g} \\ G_e & \xrightarrow{\alpha_e} & gl(n,R) \end{array}$$

即有

$$A(a)\circ g = g\circ \alpha(a) \tag{2.8.6}$$

和

$$a \circ g = \bar{g} \circ \alpha_e. \tag{2.8.7}$$

它们分别为 $G_e \to G$ 和 $G \to GL(n, R)$ 的映射.

对 G_e 中的任意向量 X,它惟一决定 G 中的单参数群

$$a(t) = g(tX), \quad t \in R.$$

为了求出 $\alpha_e(X)$ 在 G_e 上的作用,先看 $\alpha(a(t))$ 在 G_e 上的作用.

对任意的 $Y \in G_e$, $\alpha(a) \cdot Y$ 也是 G_e 中的向量,它也惟一决定在 G 中的单参数群 $g(t\alpha(a)Y)$. 并且,由于 α_e 是线性的以及(2.8.7),

$$\begin{aligned} g(t\alpha(a) \cdot Y) &= g(t\alpha(g(tX)) \cdot Y) = g(t\bar{g}(\alpha_e(tX)) \cdot Y) \\ &= g(t\bar{g}(t\alpha_e(X)) \cdot Y). \end{aligned}$$

又由于 $\bar{g} = \exp$,可得

$$\begin{aligned} g(t\alpha(a) \cdot Y) &= g(t(1 + t\alpha_e(X) + O(t^2)) \cdot Y) \\ &= g(tY + t^2\alpha_e(X) \cdot Y + O(t^3)), \end{aligned} \tag{2.8.8}$$

其中 1 表示恒同. 另一方面,由(2.8.6),

$$\begin{aligned} g(t\alpha(a) \cdot Y) &= g(\alpha(a)(tY)) = g \circ \alpha(a)(tY) \\ &= A(a) \circ g(tY) = ag(tY)a^{-1}, \end{aligned}$$

又由于 $a(t) = g(tX)$, $a(t)^{-1} = g(-tX)$,以及§6 中的定理 2.6.4,

$$\begin{aligned} g(t\alpha(a) \cdot Y) &= g(tX)g(tY)g(-tX) \\ &= g(tX)g(tY)g(-tX)g(-tY)g(tY) \\ &= g(t^2[X,Y] + O(t^3))g(tY) \\ &= g(tY + t^2[X,Y] + O(t^3)). \end{aligned} \tag{2.8.9}$$

由于 g 在 O 的近旁为同胚,比较(2.8.8)和(2.8.9)即得

$$tY + t^2\alpha_e(X) \cdot Y + O(t^3) = tY + t^2[X,Y] + O(t^3)$$

对充分小的 t 成立. 所以

$$\alpha_e(X) \cdot Y = [X, Y],$$

即

$$a\mathrm{d}X \cdot Y = [X, Y].$$

§9 李 子 群

定义 2.9.1 李群 G 的子集合 H 称为 G 的一个李子群，如果

1. H 是 G 的子群，
2. H 是 G 的子流形.

例 2.9.1 李群 G 的离散子群是它们的零维李子群.

例 2.9.2 设 G 是李群，X 是 G_e 中一个非零向量，则由它确定的单参数群

$$g: \quad R \to G,$$

即 $g(t,X)(t \in R)$ 是 G 的一维李子群.

例 2.9.3 实数加法群 R 的全体有理数的集合对其诱导拓扑构成 R 的一个拓扑子群，但不是李子群.

定理 2.9.1 李群 G 的一个子集合 H 是 G 的李子群，如果

1. H 是 G 的子群，
2. H 是李群，
3. 恒同映射

$$i: \quad H \to G$$

是连续的.

证明 由 H 是 G 的子群且 H 和 G 都是李群，可知

$$i: \quad H \to G$$

是连续的李同态. 由定理 2.7.4，i 是 C^∞ 的. 又由于 i 是恒同，它是不退化的，所以，H 是 G 的子流形. 这就证明了 H 是 G 的李子群.

定理 2.9.2 李群 G 的李子群 H 是李群，且 H 的李代数 H_e 是 G 的李代数 G_e 的子代数.

证明 要证明 H 是李群只须证明 H 中的乘法是 C^∞ 的. 因为 H 是 G 的子流形，所以，在 H 的每一点的近旁都可以选 G 中的一部分坐标使其限制在 H 上成为 H 的坐标. 于是，对在这个近旁中的任意的 H 的元素 a 和 b，由于 ab 在 G 中的坐标是 C^∞ 的，从而

可知 ab 在 H 中的坐标也是 C^∞ 的，所以，H 是李群.

因为 H 是 G 的李子群，所以，恒同映射

$$i:\quad H \to G$$

是李同态. 于是，i 在单位的切映射

$$i_e:\quad H_e \to G_e$$

是李代数同态. 又因为 i 是非退化的，所以，i 核为零. 因此，H_e 是 G_e 的李代数.

定理 2.9.3 李群 G 的李代数 G_e 的每一个子代数是 G 的惟一的连通李子群的李代数.

证明 设 L 是 G 的一个子代数，将 L 左移到群的各点就得到 G 上的与之相对应的左不变的平面场 $\underline{L}$. 将 L 的一组基左移就得到一组左不变的向量场，它也构成 $\underline{L}$ 的一组基. 因为 L 是 G_e 的子代数，所以，$\underline{L}$ 就是 G 的左不变向量场李代数 $L(G)$ 的子代数，即 $\underline{L}$ 是对合的. 由第一章的 Frobenius 定理，在单位 e 近旁有过 e 的惟一的最高维的积分流形 V，它又惟一地生成李群 G 的一个连通子群 H. 由于生成按群的乘法即左移，而 $\underline{L}$ 又是左不变的，所以，H 切于 $\underline{L}$，即 H 是 $\underline{L}$ 的积分流形. 因此，对 H 上任一点 a，$aV \subset H$，即有 H 是 G 的子流形. 所以，H 是 G 的李子群，且 $H_e = L$.

以上的定理给出了李群 G 的连通李子群与 G 的李代数 G_e 的子代数之间的一一对应. 特别，G_e 的任一非零向 X，决定 G_e 的一个一维子代数，它对应 G 的惟一的一个一维连通 $g(tX)$，这就是前面已经说过的单参数子群即线群.

李代数的著名的 Ado 定理说明，任一个有限维的实李代数必同构于某一个线性李代数 $gl(n,R)$ 的一个子代数，而 $gl(n,R)$ 是线性群 $GL(n,R)$ 的李代数. 于是，由上述定理就可以得到

定理 2.9.4 任一有限维的实李代数必为一李群的李代数.

进一步，与李群的正规李子群相对应的是它的李代数的理想.

定理 2.9.5 设 G 是连通李群，H 是 G 的连通李子群，则 H 是 G 的正规李子群必须且只须 H 的李代数是 G 的李代数 G_e 的理想.

证明 必要性 H 是 G 的正规子群,即任意的 $a\in G$,都有

$$A(a)H = aHa^{-1}\subset H,$$

因此,$A(a)$在单位的切映射 $A(a)_e$ 使$A(a)_eH_e\subset H_e$,即

$$\alpha(a)H_e\subset H_e,\quad a\in G.$$

于是,对任意的 $X\in G_e$,$A\in H_e$ 和 $t\in R$,

$$\alpha(g(tX))\cdot A\in H_e \tag{2.9.1}$$

由下列图表交换,

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha} & GL(n,R) \\ g\uparrow & & \uparrow\bar{g} \\ G_e & \xrightarrow{\alpha_e} & gl(n,R) \end{array}$$

即

$$\alpha\circ g=\bar{g}\circ\alpha_e,$$

可得

$$\begin{aligned}\alpha(g(tX))\cdot A &= \bar{g}(\alpha_e(tX))\cdot A=\bar{g}(t\alpha_e(X))\cdot A\\ &=(1+t\alpha_e(X)+O(t^2))\cdot A\end{aligned}$$

对任意的充分小的 t 成立,式中数 1 表示恒同映射. 由 $\alpha_e(X)\cdot A=[X,A]$以及(2.9.1),则 对任意的充分小 t,

$$A+t[X,A]+O(t^2)\in H_e,$$

又由 $A\in H_e$ 的假设,则有

$$[X,A]\in H_e$$

对任意的 $X\in G_e$ 和$A\in H_e$ 成立. 所以

$$[G_e,H_e]\in H_e,$$

即 H_e 是 G_e 的理想.

充分性 设 V 是 G 的一个法坐标域,并记

$$G_V=V=G\cap V,\quad H_V=H\cap V,$$

则对 G_V 中的任意的元素 x 和 H_V 中任意的元素 a,必有 $X\in G_e$ 和$A\in H_e$ 使得

$$g(X)=x,\quad g(A)=a.$$

由于 H_e 是 G_e 的理想，即有

$$\alpha_e(X)\cdot A=[X,A]\in H_e,$$

于是

$$\bar{g}\circ\alpha_e(X)\cdot A=\bar{g}(\alpha_e(X)A)=\exp(\alpha_e(X)\cdot A)$$
$$=A+[X,A]+\frac{1}{2}[X[X,A]]+\cdots\in H_e.$$

又由 $\alpha\circ g=\bar{g}\circ\alpha_e$，可知

$$\alpha(x)\cdot A=\alpha(g(X))\cdot A=(\bar{g}\circ\alpha_e(X))\cdot A\in H_e,$$

因此

$$g\circ\alpha(x)\cdot A=g(\alpha(x)\cdot A)\in H.$$

又因为下列图表

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{A(x)} & G \\ g\uparrow & & \uparrow g \\ G_e & \xrightarrow{\alpha(x)} & G_e \end{array}$$

也是交换的，即

$$g\circ\alpha(x)=A(x)\circ g,$$

所以

$$A(x)\cdot g(A)=g\circ\alpha(x)\cdot A\in H,$$

即

$$A(x)\cdot a=xax^{-1}\in H.$$

这就证明了

$$G_VH_VG_V^{-1}\subset H. \tag{2.9.2}$$

因为 H 是连通李群，所以 H 可由 H_V 生成. 于是，H 中的任意元素 h 必可表示为

$$h=h_1\cdots h_r,\qquad h_n,\cdots,h_r\in H_V,$$

因此对 G_V 中的任意元素 x，由(2.9.2)，

$$A(x)h=xhx^{-1}=xh_1\cdots h_rx^{-1}$$
$$=xh_1x^{-1}xh_2x^{-1}\cdots xh_rx^{-1}\in H,$$

即有

$$G_V H G_V^{-1} \subset H. \tag{2.9.3}$$

又因为 G 是连通的，它可由 G_V 生成. 则对任意的 $y \in G$，它可表示为

$$y = y_1 \cdots y_s, \quad y_1, \cdots, y_s \in G_V,$$

因此

$$A(y)h = yhy^{-1} = y_1 \cdots y_s h y_s^{-1} y_1^{-1}$$
$$= A(y_1) \cdots A(y_s) h \in H$$

对任意的 $y \in G$ 和 $h \in H$ 成立. 所以

$$GHG^{-1} \subset H,$$

即 H 是 G 正规子群.

定理 2.9.6 李群的 C^1 弧连通子群是李子群.

证明 设 H 是李群 G 的 C^1 弧连通子群，考虑 H 中起自单位 e 的 C^1 曲线

$$x: \quad [0, \varepsilon] \to H,$$

即

$$x = x(t), \quad t \in [0, \varepsilon],$$

并且，$x(0) = e$. 设 $x(t)$ 在 $x(0) = e$ 的切向量为 $\dot{x}_0$，H 中起自 e 的全体 C^1 曲线在单位的切向量的集合为 H_e'. 显然，$H_e' \subset G_e$.

设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是 H 中起自单位 e 的 C^1 曲线，它们在单位 e 的切向量分别为 $\dot{x}_0$ 和 $\dot{y}_0$，显然，对任意的实数 a，$x(at)$ 是 H 中起自单位 e 的 c^1 曲线，并且，$x(t)y(t)$ 和 $x(\sqrt{t})y(\sqrt{t})x(\sqrt{t})^{-1} \cdot y(\sqrt{t})^{-1}$ 也都是 H 中起自单位 e 的 C^1 曲线. 还不难证明，$x(at)$，$x(t)y(t)$ 和 $x(\sqrt{t})y(\sqrt{t})x(\sqrt{t})^{-1}y(\sqrt{t})^{-1}$ 在单位的切向量分别为 $a\dot{x}_0$，$\dot{x}_0 + \dot{y}_0$ 和 $[\dot{x}_0, \dot{y}_0]$，都是 H_e' 中的元素. 因此，H_e' 是李群 G 的李代数 G_e 的子代数. 由定理 2.9.3，H_e' 惟一决定 G 的一个连通李子群 H' 以 H_e' 为它的李代数. 现在只须证明 $H' = H$.

设 x_1 是 H 中的任意一点，由于 H 是 C^1 弧连通的，则必有连接单位 e 和 x_1 的 C^1 曲线，即

$$x: \quad [0, 1] \to H$$

使 $x(0)=e, x(1)=x_1$. 以下证明，$x(t)$一定在 H'中.

对任意的 $s\in[0,1]$，由 H 是子群，以及 $x(s)\in H$，必有

$$L_{x(s)}^{-1}x(t) \in H,$$

并且

$$L_{x(s)}^{-1}x(s) = e.$$

这就说明

$$L_{x(s)}^{-1}x: \quad [0,1] \to H$$

也是 H 中起自单位 e 的一条 C^1 曲线，因此，它在单位的切向量

$$L_{x(s)}^{-1}\dot{x}(s) \in H_e',$$

其中 $\dot{x}(s)$是曲线 $x(t)$在 s 的切向量. 于是，对任意的 $s\in[0,1]$，

$$\dot{x}(s) \in L_{x(s)}H_e' = (\underline{H_e}')_{x(s)},$$

其中 $\underline{H_e}'$是H_e'左移生成的平面场. 这就是说，曲线 $x(t)$在任一点的切向量都属于这个平面场，而 H'是这个平面场的最高维积分流形，因此 $x(t)$在 H'上，特别，H 上任一点 $x_1=x(1)\in H'$，所以

$$H \subset H'.$$

以下再证明 $H'\subset H$. 在 H_e'中取一组基

$$e_\beta = \dot{x}_0^\beta, \quad \beta = 1,\cdots,r,$$

其中 $\dot{x}_0^\beta(\beta=1,\cdots,r)$是 H 中起自单位 e 的曲线 $x^\beta(t)$在 e 的切向量. 令

$$h: \quad t^\beta e_\beta \to x^1(t^1)\cdots x^r(t^r), \quad t^1,\cdots,t^r \in [0,1],$$

因为 H 是子群，$x^\beta(t)$在 H 上，所以，$x^1(t^1)\cdots x^r(t^r)$在 H 上，于是，h 是 H_e'到 H 的一个映射

$$h: \quad H_e' \to H.$$

显然，它也是 H_e'到 H'的一个映射

$$h: \quad H_e' \to H'.$$

又因为

$$\left.\frac{\partial h}{\partial t^\beta}\right|_0 = \left.\frac{\mathrm{d}h^\beta(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \dot{x}_0^\beta = e_\beta, \quad \beta = 1,\cdots,r,$$

所以，h 作为 H_e'到 H'的映射，在单位的切映射为恒同. 因此，在 e

的近旁

$$h:\quad H_e' \to H'$$

为同胚.于是,在 e 近旁 $H' \subset H$.又由于 H' 是连通的,它可由单位的近旁生成,所以

$$H' \subset H.$$

这样我们就证明了

$$H' = H,$$

也就证明了 H 是 G 的李子群.

下面将证明李群的闭子群一定是它的李子群.为此先证明下列两个预备定理.

定理 2.9.7 设 H 是李群 G 的闭子群,$X, X_i(i=1,2,\cdots) \in G_e$,$0<t_i(i=1,2,\cdots) \in R$,并且,

$$X_i \to X,\quad t_i \to 0$$

以及 $g(t_i X_i) \in H$,则对任意的 $t \in R$,

$$g(tX) \in H.$$

证明 对任意的 $t \in R$,设 n_i 是 t/t_i 的整数部分,即

$$\frac{t}{t_i} = n_i + r_i \quad i = 1,2,\cdots$$

其中 n_i 为整数,$0 \leqslant r_i < 1$,于是

$$t = n_i t_i + r_i t_i.$$

由 $t_i \to 0$,则有

$$n_i t_i \to t$$

以及

$$g(t_i X_i)^{n_i} = g(n_i t_i X_i) \to g(tX).$$

又因为 H 是 G 的闭子群,所以

$$g(tX) \in H.$$

定理 2.9.8 设 H 是李群 G 的闭子群,则

$$H_e' = \{X \in G_e \mid g(tX) \in H,\quad t \in R\}$$

是 G_e 的子代数.

证明 若 $x\in H_e'$，则对任意的 $s,t\in R$，

$$g(tsX)\in H,$$

所以

$$sX\in H_e',\quad s\in R.$$

又若 $X,Y\in H_e'$，由 H 是子群，

$$g(tX)g(tY)\in H,$$

又由§6 中定理 2.6.4，

$$g(tX)g(tY)=g(t(X+Y+Z_t))\in H,$$

其中 $Z_t\to 0$，当 $t\to 0$ 时. 特别，对 $t_i(>0)\to 0$，

$$g(t_i(X+Y+Z_{t_i}))\in H$$

且

$$X+Y+Z_{t_i}\to X+Y.$$

由定理 2.9.7，$g(t(X+Y))\in H$，所以

$$X+Y\in H_e'.$$

类似地，由定理 2.6.4 的(2.6.5)，

$$g(tX)g(tY)g(tX)^{-1}g(tY)^{-1}=g(t^2([X,Y]+Z_t)),$$

其中 $Z_t\to 0$，当 $t\to 0$ 时. 于是得到

$$[X,Y]\in H_e'.$$

这就证明了 H_e' 是 G_e 的子代数.

定理 2.9.9 李群的闭子群是它的李子群.

证明 设 H 是李群 G 的闭子群，

$$H_e'=\{X\in G_e\mid g(tX)\in H,t\in R\}.$$

则由定理 2.9.8，H_e' 是 G_e 的子代数，它对应 G 中惟一的连通李子群 H'. 为证明 H 是 G 的李子群，只须证明在单位近旁 $H'=H$，这是因为 H' 和 H 的单位连通分支都由它们的单位的邻域生成.

在单位近旁，g： $H_e'\to H'$ 是同胚，又由 H_e' 的构成可知，$g(t)\in H$. 因此，在单位近旁，

$$H'\subset H.$$

以下证明，在单位近旁 $H\subset H'$. 在 G_e 上任取一欧氏度量，并

设 s 是 $H_e'(\subset G_e)$ 的正交补，D 是 S 中单位向量的集合.

首先证明，对任意的 $Y\in D$，必有 $\delta(Y)>0$ 使当 $0<1\leqslant\delta$ 时，$g(tY)$ 都不在 H 中. 因为，若不然，必有 $t_i(>0)\to0$，使 $g(t_iY)\in H$，由定理 2.9.7，必有 $g(tY)\in H$，从而有 $Y\in H_e'$ 与 $Y\in D$. 矛盾.

因为 D 是紧致的，必有共同的 $\delta(>0)$ 存在. 这就说明，必有 S 的原点近旁 U，使 $g(U)$ 中除单位 e 以外的点不存在 H 中的点，即

$$g(U)\cap H=\{e\},$$

又由于 $g:H_e'\to H'$ 在单位近旁为同胚，必有 H_e' 中原点的邻域 V，使

$$g(V)\subset H'\subset H.$$

于是得到映射

$$\varphi:\quad U\times V\to G$$

使

$$(X,Y)\to g(X)g(Y),\quad X\in U,Y\in V.$$

由 φ 的定义，φ 在原点的切映射为恒同，可不妨设 φ 在 $U\times V$ 上为同胚. 于是 $\varphi(U\times V)$ 就是 G 的单位 e 的一个邻域，而 $\varphi(U\times V)\cap H$ 则是 H 的单位 e 的一个邻域. 现在证明

$$\varphi(U\times V)\cap H\subset H'.$$

因为 $\varphi(U\times V)$ 中的元素必可表示为

$$g(X)g(Y),X\in U,Y\in V,$$

若 $g(X)g(Y)\in\varphi(U\times V)\cap H$，又由于 $g(Y)\in H'\subset H$，以及 $g(Y)^{-1}\in H$，则有

$$g(X)=g(X)g(Y)\cdot g(Y)^{-1}\in H,$$

因此

$$g(X)\in g(U)\cap H,$$

则必有 $g(X)=e$，并从而得到

$$g(X)g(Y)=eg(Y)=g(Y)\in H'.$$

这就证明了 $\varphi(U\cap V)\cap H\subset H'$. 于是，在单位 e 近旁

$$H \subset H'.$$

所以在单位近旁，$H = H'$，H 是 G 的李子群.

例 2.9.4 二维环群可看作是两个幺模复数群的乘积，即

$$T^2 = \{(e^{2\pi x^1 i}, e^{2\pi x^2 i}) \mid x^1, x^2 \in R\}.$$

则由

$$(x^1, x^2) = (t, \beta t), \quad t \in R$$

得到环面的一个一维李子群. 当 β 为无理数时，这个一维子群在环面上是稠密的，它不是这个环面的闭子群. 这个例子还说明，李群的李子群未必是拓扑子群，即其拓扑可不同于它的诱导拓扑.

利用定理 2.9.9 可以简单地证明在 §7 中证明了的定理 2.7.4.

定理 2.9.10 李群之间的连续同态是 C^∞ 的.

证明 设 G 和 $\overline{G}$ 是李群，

$$\varphi: \quad G \to \overline{G}$$

是连续的同态. 因为 φ 是连续的，则 $\varphi(G)$ 是 $\overline{G}$ 中的闭集，所以

$$F = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in G\}$$

是李群 $G \times \overline{G}$ 的闭子群，因而是李子群，于是

$$x \to (x, \varphi(x)) \to \varphi(x), \quad x \in G$$

是 C^∞ 的.

从定理 2.9.9 的证明过程中可以看到，若 H 是 G 的闭子群，则在 G 的单位 e 的近旁有一坐标系 φ 把 e 的近旁表示为拓扑积，即

$$\varphi: \quad U \times V \to G, \quad U \subset S, V \subset H_e,$$

其中 S 是 H_e 的正交补，并且，$\varphi(U) \subset H$. 于是，在 G 的单位 e 近旁的任一点 z 总可以惟一表示为

$$z = xy = g(X)g(Y), \quad X \in U, Y \in V,$$

其中 $x = g(X)$，$y = g(Y)$. 这样 z 就可以用 X 和 Y 或进一步用它们的坐标 (X^i) 和 (Y^β) 表示为

$$z = (X, Y) = (X^i, Y^\beta),$$

即

$$z^i = X^i, \quad z^\beta = Y^\beta.$$

因为 $y=g(Y)\in H$，则 z 经 H 中的任一元素 h 的右移必有

$$(zh)^i = (xyh)^i = X^i,$$

所以 (X^i) 即 X 只与右旁集 $\bar{z}=zH$ 有关. 于是令

$$\gamma(\bar{z}) = \gamma(zH) = \gamma(z) = X,$$

这样，就得到 G/H 在单位 $\bar{e}=H$ 近旁的一个坐标系

$$\gamma: \quad G/H \to U.$$

将这个坐标系左移到 G/H 的各点，就得到 G/H 上的一个坐标覆盖，并且，若 $\bar{z}$ 属于两个不同的坐标系，假设它们是由原坐标系分别经左移 $\bar{z}_1$ 和 $\bar{z}_2$ 得到的，$\bar{z}$ 的坐标分别为 X_1 和 X_2，即

$$X_1 = \gamma(z_1^{-1}z), X_2 = \gamma(z_2^{-1}z).$$

于是

$$X_1 = \gamma(z_1^{-1}z_2z_2^{-1}z).$$

而左移是 C^∞ 的，所以，X_1 是 $z_2^{-1}z$ 的 C^∞ 函数，也是 X_2 的 C^∞ 函数. 因此，这就得到 G/H 上的一个微分结构，G/H 成一微分流形，并将这一 G/H 上的微分结构称为是由 G 诱导的. 这就证明了下列定理.

定理 2.9.11 设 G 是李群，H 是它的闭子群，则 G/H 上有由 G 诱导的微分结构使 G/H 成一微分流形.

例 2.9.5 设 R^m 是 m 维欧氏向量空间，$G(m,k)$ 是 R^m 的全体 k 维子空间构成的集合. 通过空间的正交变换可以将一个 k 维子空间变到任意的另一个 k 维子空间，所以 $G(m,k)$ 是 m 阶正交群 $O(m,R)$ 的齐性空间，保持 $G(m,k)$ 中一个元素不动的全体正交变换是 $O(k,R)\times O(m-k,R)$. 这是 $O(m,R)$ 的一个闭子群，于是，由定理 2.9.11，

$$G(m,k) = O(m,R)/O(k,R)\times O(m-k,R),$$

又由 $O(m,R)$ 诱导的微分结构，$G(m,R)$ 成一微分流形，称为 Grassmann 流形，它的维数是

$$\frac{1}{2}m(m-1)-\frac{1}{2}k(k-1)-\frac{1}{2}(m-k)(m-k-1)$$
$$=k(m-k).$$

当 $k=1$ 时,$G(m,1)$就是 $m-1$ 维的射影空间.

进一步,若 H 是H 的正规子群,则 G/H 成群,并且

$$(\bar{z}_1,\bar{z}_2)^i=(\overline{z_1z_2})^i=(z_1z_2)^i,\quad \bar{z}_1,\bar{z}_2\in G/H$$

是 z_1^i 和 z_2^i 的 C^∞ 函数,也就是 $\bar{z}_1^i$ 和 $\bar{z}_2^i$ 的 C^∞ 函数.这就说明,G/H 中的乘法运算的C^∞的.所以,G/H 为李群,并且,投影 $\pi:G\to G/H$ 是李同态.这就得到了下列定理.

定理 2.9.12 若 H 是李群G 的正规闭子群,则 G/H 对由 G 诱导的微分结构成一李群,并且投影

$$\pi:\quad G\to G/H$$

为李同态.

由此立即推断,π 在单位的切映射

$$\pi_e:\quad G_e\to(G/H)_e$$

为李代数同态,并且 $H_e=\pi_e$ 核为G_e 的理想.

设 G 是李群,H 是它的子群,G/H 是 H 的左旁集所成的空间,于是,若 $\bar{z}=zH\in G/H$,$a\in G$,则

$$a(zH)=azH,$$

即 G 的左移保持左旁集,并且

$$a\bar{z}_1=\overline{az},\quad a,z\in G.\qquad(2.9.4)$$

因此 G 的左移可以作用在G/H 上,并将由 G 中元素a 决定的在G/H 中的左移记作$l(a)$,这样,(2.9.4)就可以表示为

$$l(a)\circ\pi z=\pi(az)=\pi(L_az),\quad a,z\in G.\qquad(2.9.5)$$

这就得到 G 中元素a 在G 的左移L_a 与在G/H 中的左移$l(a)$的关系

$$l(a)\circ\pi=\pi\circ L_a,\quad a\in G,\qquad(2.9.6)$$

即左移与投影 π 交换.从而,其切映射

$$l(a)_*\circ\pi_*=\pi_*\circ(L_a)_*.\qquad(2.9.7)$$

特别,对 $h\in H$,h 的左移保持每一个左旁集,

$$z\bar{h} = \bar{z}, \quad h \in H, \quad z \in G.$$

即

$$\pi(zh) = \pi z, \quad h \in H, z \in G.$$

于是就得到

$$\pi \circ R_h = \pi, \quad h \in H.$$

从而有

$$\pi_* \cdot (R_h)_* = \pi_*, h \in H,$$

即 π_* 经 H 的右移不变.因此

$$\begin{aligned}\pi_* \circ \alpha(h) &= \pi_* \circ (A(h))_e = \pi_* \circ (R_h^{-1})_*(L_h)_* \\ &= \pi_* \circ (L_h)_*, \quad h \in H,\end{aligned}$$

其中 α 为 G 的伴随表现,再由(2.9.7)就得到

$$\pi_* \circ \alpha(h) = l(h)_* \circ \pi_*, \quad h \in H.$$

§10 李变换群

定义 2.10.1 李群 G 称为微分流形 M 上的**李变换群**,如果

1. G 中的任一元素 a 都决定 M 上的一个变换,即

$$a: \quad M \to M$$

为微分同胚,它使

$$x \to a(x), \quad x \in M,$$

并常将 $a(x)$ 记作 $x \cdot a$ 或 xa.

2. $(a, x) \to xa, a \in G, x \in M$,

作为

$$G \times M \to M$$

的映射是 C^∞ 的.

3. 对任意 $a, b \in G$ 的和 $x \in M$,

$$x(ab) = (xa)b.$$

定义中的 a 既是李群 G 中的元素又是微分流形 M 上的变换,也常称作 a 作用于 M,xa 是 x 经 a 的像,也可记作 $R_a x$,并称

为右作用的.同样也可以定义左作用的变换,即

$$L_a x = ax, \quad x \in M.$$

左右作用的区别在于定义 2.10.1 中的条件 3,对右作用的变换,

$$x(ab) = (xa)b, \quad a, b \in G, x \in G,$$

即

$$R_{ab} = R_b \circ R_a, \quad a, b \in G.$$

对左作用的变换,

$$(ab)x = a(bx), \quad a, b \in G, x \in M.$$

即

$$L_{ab} = L_a \cdot L_b, \quad a, b \in G.$$

由定义立即推得,对 G 中的单位 e,

$$R_e = L_e = \text{恒同},$$

以及对 G 中任意的元素 a,

$$R_a^{-1} = R_{a^{-1}}, \quad L_a^{-1} = L_{a^{-1}}.$$

定义 2.10.2 设李群 G 是微分流形 M 上的李变换群,G 在 M 上的作用称为**有效的**,如果保持整个 M 不动的变换即恒同变换只有 R_e. G 在 M 上的作用称为**自由的**,如果使有一个点不动的变换只有 R_e.

以上定义对左作用的李变换群同样适用.

例 2.10.1 李群 G 的任一元素都决定 G 上的一个左移或右移变换,它们构成 G 上的左移或右移变换群,分别为左作用的和右作用的.由于左移或右移是单传递的,因此,其作用是自由的.

例 2.10.2 设 $M = R^n$, $G = GL(n, R)$,则 G 中元素都决定 M 上的一个线性变换,并按左作用和右作用分别定义为

$$(A, x) = Ax, \quad A \in GL(n, R), x \in M,$$

或

$$(A, x) = xA, \quad A \in GL(n, R), x \in M.$$

这样,G 就是 M 上的左作用的或右作用的李变换群. G 在 M 上的作用是有效的,但不是自由的.

例 2.10.3 在复数平面上加上无穷远点成一 Gauss 球面 M. $GL(2,C)$是二阶复线性群,C 表示复数域,规定 $GL(2,C)$在 M 上的作用如下,若

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in GL(2,C),$$

则

$$A(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad z\in C,$$

$$A(\infty)=\frac{a}{c}.$$

不难验证,$GL(2,C)$是在 M 上左作用的李变换群.但是,它在 M 上的作用不是有效的,因为,对任意非零的 $\lambda\in C$,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\in GL(2,C)$$

都保持 M 不动.

特别,若微分流形 M 上的李变换群 G 为一实数加群,则称之为 M 上**单参数变换群**.这时,对任意的实数 t,都决定 M 上的一个变换

$$\varphi_t: M\to M,\quad t\in R,$$

使

$$p\to\varphi_t(p),\quad p\in M.$$

$\varphi_t(p)$作为 t 和 p 的函数都是 C^∞的,并且

$$\varphi_t\circ\varphi_s=\varphi_{t+s},\quad t,s\in R,$$

于是

$$\varphi_0=\text{恒同},\quad \varphi_t^{-1}=\varphi_{-t},\quad t\in R.$$

显然,对单参数变换群,无左右作用之别.

设 $\varphi_t(t\in R)$是 M 上的一个单参数变换群,对 M 上任意给定的一点 p,令

$$x_p(t)=\varphi_t(p),\quad t\in R,$$

这就是点 p 在 φ_t 作用下的像.又由

$$x_p(0) = \varphi_0(p) = p,$$

$x_p(t)(t \in R)$是过 p 的一条 C^∞ 曲线,称为 p 在 φ_t 作用下的轨道.它在 p 点的切向量为

$$(x_p)_* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}x_p(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = \dot{x}_p(0), \quad p \in M.$$

这样,对任意给定的 M 上的单参数变换群 φ_t,就在 M 上的每一点 p 都决定在该点的一个切向量 $\dot{x}_p(0)$,从而也就决定了 M 上的一个 C^∞ 向量场 $\underline{X}$,

$$\underline{X}_p = \dot{x}_p(0), \quad p \in M.$$

$\underline{X}$ 称为由 $\varphi_t(t \in R)$诱导的向量场.

设 $q \in x_p(t)$,则必有 $s \in R$,使

$$q = x_p(s) = \varphi_s(p),$$

于是,q 的轨道

$$x_q(t) = \varphi_t(q) = \varphi_t \circ \varphi_s(p) = \varphi_{t+s}(p) = x_p(t+s),$$

所以

$$\underline{X}_q = \dot{x}_q(0) = \dot{x}_p(s).$$

这就说明,p 在 φ_t 作用下的轨道 $x_p(t)$是向量场 $\underline{X}$ 过 p 的积分曲线.因此,$x_p(t)$适合微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \underline{X}$$

并合于初始条件

$$x_p(0) = p.$$

反过来,对在微分流形 M 上任意给定的一个 C^∞ 向量场 $\underline{X}$,是否存在一个单参数变换群,它诱导的向量就是 $\underline{X}$? 问题自然归结为求上述微分方程的解.一般的,只存在与之相应的局部变换的局部单参数变换群.

定义 2.10.3 设 U 是微分流形 M 的一个开集,$I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$,$\varepsilon > 0$,映射

$$\varphi: \quad I_\varepsilon \times U \to M$$

称为 M 上的一个局部变换的**局部单参数变换群**，如果

1. 对每一个 $t\in I_\varepsilon$，

$$\varphi_t:\quad p\to\varphi_t(p),\quad p\in M$$

是 U 到 $\varphi_t(U)$ 的微分同胚，

$$\varphi_t:\quad U\to\varphi_t(U),\quad t\in I_\varepsilon.$$

2. 若 t,s 和 $t+s\in I_\varepsilon$，且 $p,\varphi_t(p)\in U$，则

$$\varphi_s\circ\varphi_t(p)=\varphi_{s+t}(p).$$

若 $I_\varepsilon=R,U=M$，就得到单参数变换群. 因此，以上对单参数变换群的讨论，对局部变换的局部单参数变换群都适合，只要将 t 限制在 I_ε 中，以及将 p 限制在 U 中. 因此，局部变换的局部单参数变换群 φ_t 也决定 U 上的一个向量场，称为由 φ_t 诱导的向量场.

定理 2.10.1 设 $\underline{X}$ 是微分流形 M 上的一个 C^∞ 向量场，则对 M 上的任一点 p_0，都有 p_0 的邻域 U 和 $\varepsilon>0$，以及一个局部变换的局部单参数变换群

$$\varphi:\quad I_\varepsilon\times U\to M,$$

它诱导给定的向量场 $\underline{X}$.

证明 由常微分方程的解的存在惟一性定理，对给定的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\underline{X}\tag{2.10.1}$$

和 M 上的任一点 p，必有 $\varepsilon_1>0$，和 p_0 的一个邻域 U_1，使当 $|t|<\varepsilon_1$ 和 $p\in U_1$ 时，方程(2.10.1)有过 p 的惟一的积分曲线 $x_p(t)$，即

$$\frac{\mathrm{d}x_p(t)}{\mathrm{d}t}=\underline{X},\quad p\in U_1,\ |t|<\varepsilon_1,$$

$$x_p(0)=p,$$

并且，x 对 p 和 t 都是 C^∞ 的. 令

$$\varphi_t(p)=x_p(t),\quad p\in U_1,\ |t|<\varepsilon_1,$$

这就得到 U_1 到 $\varphi_t(U_1)$的 C^∞映射

$$\varphi_t:\quad U_1 \to \varphi_t(U_1),\ |t| < \varepsilon_1.$$

现在证明,对适当的 $\varepsilon>0$, $\varphi_t(t\in I_\varepsilon)$是 M 上的一个局部变的局部单参数变换群.若 $t,s,t+s\in I_{\varepsilon_1}$, p, $\varphi_s(p)\in U_1$,则

$$\varphi_{t+s}(p) = x_p(t+s)$$

和

$$\varphi_t\circ\varphi_s(p) = x_{\varphi_s(p)}(t)$$

都是方程(2.10.1)的过 $\varphi_s(p)$的积分曲线.因此,由解的惟一性,

$$\varphi_t\circ\varphi_s = \varphi_{t+s}.$$

又因为 φ_0 是 U_1 上的恒同变换,φ_t 对 t 连续,必有 $\varepsilon>0$($\varepsilon<\varepsilon_1$)和 p_0 的邻域 $U\subset U_1$,使当$|t|<\varepsilon$ 时,$\varphi_t(U)\subset U_1$,于是,当 $p\in U$ 和$|t|<\varepsilon$ 时,

$$\varphi_{-t}\circ\varphi_t(p) = \varphi_0(p) = p,$$

即在 U 上,

$$\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1},$$

所以

$$\varphi_t:\quad U\to\varphi_t(U),\quad t\in I_\varepsilon$$

是微分同胚.

这就证明了 $\varphi_t(t\in I_\varepsilon)$是 M 上的一个局部变换的局部单参变换群,它诱导向量场 $\underline{X}$.

一般的,相应的单参数变换群未必存在.不难证明,当 M 是紧致的,则有肯定的结论.

设 $\varphi_t(t\in R)$是 M 上的一个单参数变换群,

$$\psi:\quad M\to M$$

是微分同胚,容易验证

$$\Phi_t = \psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1},\quad t\in R$$

也是 M 上的一个单参数变换群.

定理 2.10.2 设 $\varphi_t(t\in R)$是微分流形 M 上单参数变换群,它诱导向量场 $\underline{X}$,φ: $M\to M$ 是微分同胚,则单参数变换群 $\Phi_t=$

$\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}$诱导向量场 $\psi_*\underline{X}$.

证明 设 q 是M 上任一点,则必有 $p\in M$,使 $q=\psi(p)$. 又设 p 在φ_t 作用下的轨道为$x_p(t)$,q 在Φ_t 作用下的轨道为$\tilde{x}_q(t)$,于是

$$\tilde{x}_q(t)=\Phi_t(g)=\Phi_t\circ\psi(p)=\psi\circ\varphi_t(p)=\psi(x_p(t)),$$

因此

$$\psi_*\underline{X}_p=\left(\psi_*\frac{\mathrm{d}x_p(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}=\frac{\mathrm{d}\psi(x_p(t))}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}$$

$$=\frac{\mathrm{d}\tilde{x}_q(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}=\underline{\tilde{X}}_q,$$

其中 $\underline{\tilde{X}}$ 是Φ_t 诱导的向量场,所以

$$\underline{\tilde{X}}=\psi_*\underline{X}.$$

特别,若向量场 $\underline{X}$ 是ψ 不变的,即 $\psi_*\underline{X}=\underline{X}$,则有 $\underline{\tilde{X}}=\underline{X}$,即 Φ_t 和 φ_t 诱导相同的向量场,则它们为相同的单参数变换群,并由此立即可得下列推论.

定理 2.10.3 在定理 2.10.2 的假设下,$\underline{X}$ 是ψ 不变的必须且只须ψ 与 $\varphi_t(t\in R)$交换.

例 2.10.4 设 G 是李群,$\underline{X}$ 是 G 上的一个左不变向量场,则由 $X=\underline{X}_e$ 决定G 上的一个单参数群 $g(tX)(t\in R)$,它也是向量场 $\underline{X}$ 过单位e 的一条积分曲线.因为 $\underline{X}$ 是左不变的,所以,过 G 上任一点 p 的积分曲线就是$g(tX)$的左移,即 $pg(tX)$. 于是,令

$$\varphi_t(p)=pg(tX),\quad p\in G,t\in R. \tag{2.10.2}$$

这就得到 G 上的一个单参数变换群

$$\varphi:\quad G\to G,\quad t\in R.$$

它诱导左不变向量场 $\underline{X}$. 由(2.10.2),

$$\varphi_t(p)=R_{g(tX)}p,\quad p\in G,t\in R.$$

即有

$$\varphi_t=R_{g(tX)},\quad t\in R.$$

这就证明,与左不变向量 $\underline{X}$ 相对应的单参数变换群是右移$R_{g(tX)}$,

所以，又常将 G 上的左不变向量场称为无穷小右变换.

在第一章中曾经说明，微分流形 M 上全体 C^∞ 向量场的集合对线性运算和换子运算构成一个实李代数 $L(M)$. 下面给交换子运算一个几何解释.

定理 2.10.4 设 $\underline{X}$ 和 $\underline{Y}$ 是微分流形 M 上的 C^∞ 向量场，$\varphi_t(t\in R)$ 是 M 上的单参数变换群，它诱导向量 $\underline{X}$，则

$$[\underline{X},\underline{Y}] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\underline{Y} - (\varphi_t)_*\underline{Y}), \qquad (2.10.3)$$

即

$$[\underline{X},\underline{Y}]_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\underline{Y} - (\varphi_t)_*\underline{Y})_p, \quad p\in M. \qquad (2.10.4)$$

证明 设 f 是 M 上的一个任意的可微函数，则

$$\begin{aligned}\underline{X}_p f &= \mathrm{d}f(\underline{X}_p) = \left.\frac{\mathrm{d}f(\varphi_t(p))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(\varphi_t(p)) - f(\varphi_0(p))),\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(\varphi_t(p)) - f(p)), \quad p\in M.\end{aligned}$$

即

$$\underline{X}f = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f\circ\varphi_t - f).$$

令

$$g_t(p) = \frac{1}{t}(f(\varphi_t(p)) - f(\varphi_0(p))), \quad t\neq 0, p\in M,$$

$$g_0(p) = \lim_{t\to 0} g_t(p) = \underline{X}_p f,$$

即

$$g_t = \frac{1}{t}(f\circ\varphi_t - f), \quad t\neq 0, \quad g_0 = \underline{X}f.$$

于是

$$((\varphi_t)_*\underline{Y})f = (\underline{Y}(f\circ\varphi_t))\circ\varphi_t^{-1}$$

$$=(\underline{Y}(tg_t+f))\circ\varphi_{-t},$$

从而得到

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\underline{Y}-(\varphi_t)_*\underline{Y})f$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\underline{Y}f-(\underline{Y}f)\circ\varphi_{-1}-t(\underline{Y}_{gt})\circ\varphi_{-1})$$
$$=\underline{X}(\underline{Y}f)-Y(\underline{X}f).$$

这就证明了

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\underline{Y}-(\varphi_t)_*\underline{Y})=[\underline{X},\underline{Y}].$$

特别,在李群 G 上,设 $X,Y\in G_e$,将它们左移到 G 的各点上得到 G 上的左不变向量场 $\underline{X}$ 和 $\underline{Y}$,由于 $R_{p(tX)}$ 诱导向量场 $\underline{X}$,则由(2.10.4),

$$[X,Y]=[\underline{X},\underline{Y}]_e=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\underline{Y}_e-((R_{g(tX)})_*\underline{Y})_e).$$

因为 $\underline{Y}$ 是左不变的,于是

$$(R_{g(tX)})_*\underline{Y}=(R_{g(tX)})_*(L_{g(tX)^{-1}})_*\underline{Y}$$
$$=\alpha(g(tX)^{-1})_*\underline{Y},$$

其中 α 是李群 G 的伴随表现,所以

$$[X,Y]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\underline{Y}-\alpha(g(tX)^{-1})_*\underline{Y})_e$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\underline{Y}-\alpha(g(-tX))_*\underline{Y})_e$$
$$=\alpha_e(X)\cdot Y, \tag{2.10.5}$$

其中 α_e 是 α 在单位 e 的切映射,即 G_e 的伴随表现.(2.10.5)也就是§8中定理2.8.1中的结论.

设 G 是在微分流形 M 上右作用的李变换群,G_e 中的任意元素 X 决定 G 的一个单参数子群

$$x(t)=g(tX),\quad t\in G_e.$$

另一方面,$g(tX)$ 作为 M 上的右作用的单参数变换群 $R_{g(tX)}$,它诱导 M 上的一个 C^∞ 向量场,记作 $\underline{X}$.令

$$\sigma(X) = \underline{X}, \quad X \in G_e,$$

这就得到 G 的李代数到 M 的向量场的李代数 $L(M)$ 的一个映射

$$\sigma: \quad G_e \to L(M).$$

现在证明，σ 必为李代数同态.

定理 2.10.5 设 G 是在微分流形 M 上右作用的李交换群，则

$$\sigma: \quad G_e \to L(M)$$

是李代数同态，并且，若 G 的作用是有效的，则

$$\sigma: \quad G_e \to \sigma(G_e)$$

为同构. 若 G 的作用是自由的，则对 G_e 中任意非零元素 A，$\sigma(A)$ 恒不变为零，即向量场 $\sigma(A)$ 无奇点.

证明 设 x 是 M 中的任意一点，令

$$\sigma_x(a) = xa = R_a x, \quad a \in G.$$

这就得到 G 到 M 的一个映射

$$\sigma_x: \quad G \to M$$

因为 $\sigma_x(e) = xe = x$，所以 σ_x 在单位 e 的切映射 $(\sigma_x)_e$ 是 G_e 到 M 在 x 切空间 M_x 的一个线性映射

$$(\sigma_x)_e: \quad G_e \to M_x, \quad x \in M.$$

若 $A \in G_e$，$g(tA)$ 是 G 上的单参数子群，它经 σ_x 的像是 M 上的曲线 $xg(tA)$，即

$$\sigma_x: \quad g(tA) \to xg(tA), \quad a \in G_e.$$

这里 $xg(tA) = R_{g(tA)}x$ 也是 M 上的点 x 经单参数群 $g(tA)$ 作用下的轨道. 于是，σ_x 在单位 e 的切映射 $(\sigma_x)_e$ 将 $g(tA)$ 在单位的切向量 A 映到曲线 $xg(xtA)$ 在 x 的切向量 $\underline{A}_x$，即

$$(\sigma_x)_e: \quad A \to \underline{A}_x = (\sigma(A))_x, \quad x \in M. \quad (2.10.6)$$

而 $(\sigma_x)_e$ 是线性的，所以

$$\sigma: \quad G_e \to L(M)$$

是线性的，并且，若 $A, B \in G_e$，则由(2.10.3)，

$$[\underline{A}, \underline{B}] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{n}(\underline{B} - R_{g(tA)}\underline{B})_x$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\underline{B}_x - R_{g(tA)}\underline{B}_{xg(tA)^{-1}})$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}((\sigma_x)_e B - R_{g(tA)}\circ(\sigma_{xg(tA)^{-1}})_e B).$$

又因为,对任意的 $b\in G$,

$$R_{g(tA)}\circ\sigma_{xg(tA)^{-1}}b = xg(tA)^{-1}bg(tA)$$
$$= \sigma_x\circ A(g(tA)^{-1})b,$$

即有

$$R_{g(tA)}\circ\sigma_{xg(tA)^{-1}} = \sigma_x\cdot A(g(tA)^{-1}),$$

式中 $A(g(tA)^{-1})$表示内自同构,即 $A(g(tA)^{-1})b = g(tA)^{-1}b\cdot g(tA)$. 它在单位的切映射为 $\alpha(g(tA)^{-1})$. 于是

$$[A,B] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}((\sigma_x)_e B - (\sigma_x)_e\circ\alpha(g(tA)^{-1})B)$$

$$= (\sigma_x)_e\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(B - \alpha(g(-tA))B)$$

$$= (\sigma_x)_e([A,B]).$$

又由(2.10.6),

$$[A,B]_x = (\sigma([A,B]))_x = \underline{[A,B]}_x,$$

所以

$$[\sigma(A),\sigma(B)] = \sigma([A,B]),A,B\in t,e,$$

即 σ 为李代数同态.

若 G 的作用是有效的,设 $A\in G_e$,且 $\sigma(A)=0$,即 $R_{g(tA)}$是 M 上的恒同变换,则必有

$$g(tA) = e.$$

从而得到 $A=0$,即 σ 核为零. 所以

$$\sigma:\quad G_e\to\sigma(G_e)$$

为同构.

若 G 的作用是自由的,设有 M 上一点 p,使 $\sigma(A)_p=0$,则 p 在 $g(tA)$作用下的轨道 $R_{g(tA)}p$ 的切向量为

$$\frac{\mathrm{d}(R_{g(tA)p})}{\mathrm{d}t} = \underline{A}R_{g(tA)p} = R_{g(tA)}\underline{A}_p$$

$$= R_{g(tA)}(\sigma(A))_p = 0.$$

即 $R_{g(tA)}$保持 p 不动. 于是, $g(tA)=e$, 从而有 $A=0$.

习　　题

1. 证明, 拓扑群 G 上全体右移变换 $R_a(a\in G)$对变换的乘法构成一群, 并且

$$R_a^{-1} = R_{a^{-1}},\quad a\in G,$$

$$R_{ab} = R_b\circ R_a,\quad a,b\in G.$$

2. 设 τ 是拓扑群 G 上的逆射, L_a 和 $R_a(a\in G)$分别为 G 上的左移和右移, 证明

(1) $L_a=\tau R_a^{-1}\tau, \in G$.

(2) $R_a=\tau L_a^{-1}\tau, a\in G$.

3. 设 G 是拓扑群, H 是 G 的闭子群. 证明: 商空间 G/H 是齐性拓扑空间.

4. 设 G 是 n 维李群, $E_i(i=1,\cdots,n)$是 G 的李代数 G_e 的一组基, $\omega=\omega^iE_i$ 是 G 上的基本微分式, $\underline{E}_i$ 是 E_i 的左移向量场, 证明: $(\underline{E}_1,\cdots,\underline{E}_n)$和$(\omega^1,\cdots,\omega^n)$是 G 上互为对偶的标架场.

5. 设 G 是李群, 群的乘法给出映射

$$\varphi:\quad G\times G\to G$$

使

$$(a,b)\to ab,$$

证明: 对任意的 $\mathrm{d}a\in G_a$ 和 $\mathrm{d}b\in G_b, a,b\in G$,

$$\mathrm{d}(ab) = a\circ \mathrm{d}b + \mathrm{d}a\circ b,$$

其中 $\mathrm{d}(ab)=(\varphi_*)_{(a,b)}(\mathrm{d}a,\mathrm{d}b)\in G_{ab}$.

6. 设 G 是李群, τ 是 G 上的逆射, 证明: 对任意的 $\mathrm{d}a\in G_a, a\in G$,

$$\mathrm{d}a^{-1} = -a^{-1}\mathrm{d}a a^{-1},$$

其中 $\mathrm{d}a^{-1}=\tau(\mathrm{d}a)\in G_{a^{-1}}$.

7. 设 φ,ω 和 ψ 都是取值于一 n 维李代数的一次形式, 证明:

$$(\varphi\wedge\omega)\wedge\psi+(\omega\wedge\psi)\wedge\varphi+(\psi\wedge\varphi)\wedge\omega=0.$$

8. 在上题中, 若 φ 是零次的, ω 和 ψ 是一次的, 给出与上题中相应的等式.

9. 设 $R^2=\{(x,y)|x,y\in R\}$,

$$\varphi_t:\quad R^2 \to R^2, t \in R,$$

使

$$\varphi_t:\quad (x,y) \to (x+2t, y+3t).$$

求 φ_t 诱导的向量场 $\underline{X}$.

10. 设 $R^2 = \{(x,y) \mid x,y \in R\}$，$R^2$ 上的向量场

$$\underline{X} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\qquad \underline{Y} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y},$$

求与 $\underline{X}$ 和 $\underline{Y}$ 相对应的单参数变换群，以及任意一点(x,y)在它们作用下的轨道.

第三章　微分方程的不变群

§1　代数方程的不变群

设 M 是 m 维微分流形，$F_\nu(\nu=1,\cdots,l)$ 是 M 上的 l 个可微的实函数，即

$$F_\nu: M \to R, \quad \nu = 1,\cdots,l,$$

则

$$F_\nu = 0, \quad \nu = 1,\cdots,l \tag{3.1.1}$$

就称为 M 上的一个**代数方程组**. M 上的一点 x 称为这个方组的**解**，如果

$$F_\nu(x) = 0, \quad x \in M, \nu = 1,\cdots,l,$$

方程组的全体解的集合

$$\varphi_F = \{x \in M \mid F_\nu(x) = 0, \quad \nu = 1,\cdots,l\}$$

称为这个方程组的**解集**. 令 $F=(F_1,\cdots,F_l)$，即 $F: M\to R^l$，则方程组(3.3.1)可简写为

$$F = 0, \tag{3.1.2}$$

其解集则可表为 $\varphi_F=\{x\in M \mid F(x)=0\}$.

设 G 是在作于 M 的一个局部李变换群.

定义 3.1.1　G 称为方程(3.1.1)的**不变群**(或**对称群**)，如果它使方程的解变为解. 即对任意的 $x\in\varphi_F$ 和 $g\in G$，必有 $g.x\in\varphi_F$.

定义 3.1.2　M 的一个子集 φ 称的 G **不变的**或 G 的**不变子集**，如果对任意的 $x\in\varphi$ 和 $g\in G$，均有 $g\cdot x\in\varphi$，即 $G\cdot\varphi\subset\varphi$.

可见，G 是方程 $F=0$ 的不变群必须且只须其解集 φ_F 是 G 不变的.

容易证明,若 M 的子集 φ_1 和 φ_2 是 G 不变的,则 $\varphi_1\cap\varphi_2$ 和 $\varphi_1\cup\varphi_2$ 也是 G 不变的.

例 3.1.1 设 M 为 $R^2=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$,$G$ 为实数加群 $G_c=\{\varphi_\varepsilon\mid\varepsilon\in R\}$,$\varphi_\varepsilon$ 在 R^2 的作用定义为

$$\varphi_\varepsilon:(x,y)\to(x+c\varepsilon,y+\varepsilon),$$

c 为任意非零常数. 这是一个单参数变换群,相应的向量场为 $c\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial y}$,任意一点 (x,y) 的轨道为直线 $\dfrac{X-x}{c}=\dfrac{Y-y}{1}$. 其任一轨道,即直线 $x=cy+d$ (d 为任意常数)都是 G_c 的不变子集. 并且,容易证明,G_c 的任一不变子集必为上述子集之并集,例如,

$$\{(x,y)\mid k_1<x-cy<k_2\}.$$

例 3.1.2 设 $M=R^2$,$G_\alpha=\{\varphi_\varepsilon\mid\varepsilon\in R\}$,$\varphi_\varepsilon$ 在 R^2 上的作用定义为

$$\varphi_\varepsilon:(x,y)\to(e^\varepsilon x,e^{\alpha\varepsilon}y),$$

α 为任意常数. G_α 的向量场为 $x\dfrac{\partial}{\partial x}+\alpha y\dfrac{\partial}{\partial y}$,其轨道为 $x=0$ 和 $y=k|x|^\alpha$ (k 为任意常数),它们构成 G_α 的不变子集.

定义 3.1.3 设 M 和 N 是微分流形,G 是作用于 M 的局部李变换群,映射

$$F:M\to N$$

称为 G 不变的,如果

$$F(g\cdot x)=F(x)$$

对任意的 $x\in M$ 和 $g\in G$ 成立.

特别,若 $N=R$,

$$F:M\to R$$

是 G 不变的,则 F 称为 G 的一个不变函数,或不变量.

若 $N=R^l$,$F=(F_1,\cdots,F_l)$,显然,F 是 G 不变的必须且只须 $F_1,\cdots,F_l$ 都是 G 的不变量.

例 3.1.3 对例 3.1.1 中的 R^2 上的平移群 G_c,容易证明函数 $\xi(x,y)=x-cy$ 是它的一个不变量,并且它的任意函数 $f(x$

$-cy)$.都是 G_c 的不变量.

反之,还可以证明 G_c 的不变量必为 $f(x-cy)$. 这是因为, $F(x,y)$是 G_c 的不变量必须且只须

$$F(x+C\varepsilon, y+\varepsilon) = F(x,y)$$

对任意 ε 成立,即 $F(x+cy, y+\varepsilon)$与 ε 无关. 由此可知 $F(x,y)$ 应满足微分方程

$$cF_x + F_y = 0,$$

而此方程的通解为 $F=f(x-cy)$.

例 3.1.4 设 $G=SO(2)=\{\varphi_\theta \mid \theta\in R\}$是 R^2 上的旋转群,即

$$\varphi_\theta: R^2 \to R^2, (x,y) \to (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

显然,x^2+y^2 以及它的任意函数 $f(x^2+y^2)$是 $SO(2)$的不变量. 反之也不难证明 $SO(2)$的不变量必为 $f(x^2+y^2)$.

定义 3.1.4 设 F 是 M 上的实值函数,即 $F: M\to R$,则 M 的子集

$$\varphi_{Fc} = \{x\in M \mid F(x) = c\}$$

称为 F 的一个**水平集**,其中 c 为任意实数.

定理 3.1.1 设 G 是作用于M 的局部李群,$F: M\to R$,则 F 是 G 不变的必须且只须 F 的所有的水平集都是 G 不变的.

证明 必要性显然,现证充分性.

设 x 是 M 上的任意一点,它必在 F 的某一水平集 φ_{Fc}上,即 $F(x)=c$. 由于 φ_{Fc}是G 不变的,则对任意的 $g\in G$,必有 $g\cdot x\in \varphi_{Fc}$,于是

$$F(g\cdot x) = c = F(x),$$

即 F 是G 不变的.

显然,有关水平集的概念可以推广到映射 $F: M\to R^l$,这时 c 理解为R^l 上的点$c=(c_1\cdots,c_l)$,其中 $c_1,\cdots,c_l$ 为任意常数,定理 3.3.1 中的结论仍然成立.

方程 $F(x)=0$ 的解集可看作 F 的一个水平集 φ_{F_0},可见,若 F 是G 不变的,则 G 必为方程$F=0$ 的不变群.

上述结论的反面未必成立，例如，设 G 在 R^2 上的作用为

$$G:(x,y)\to(\lambda x,\lambda y),$$

其中 λ 为大于 0 的任意常数. $F(x,y)=xy$，则 $F=0$ 的解集 $\varphi_F=\{(x,y)\in R^2 \mid xy=0\}$ 是 G 不变的，但 F 不是 G 不变的.

设 G 是作用于 M 的局部李变换群，对其李代数 G_e 中的任一非零元素 v，有相应的单参数子群 $g(tv)$，也记作 $\exp tv\,(t\in R)$. 作为 M 上的单参数变换群，有相应的 M 上的向量场 $\underline{v}$，我们称之为 G 的 **生成元**. 由第二章 §10，可得到 G_e 到 M 向量场李代数 $L(M)$ 的一个李代数同态

$$\sigma: G_e\to L(M).$$

以下讨论如何由李变换群 G 的生成元来判别一个函数 F 是否 G 的不变量，以及 G 是否方程 $F=0$ 的不变群.

定理 3.1.2 设 G 是作用于 M 的连通部李变换群，则 M 上的函数 F 是 G 的不变量必须且只须对 G 的所有的生成元 $\underline{v}$，

$$\underline{v}F=0$$

在 M 上成立.

证明 必要性. 设 F 是 G 的不变量，即对任意的 $g\in G$ 和 $x\in M$，$F(g\cdot x)=F(x)$ 成立. 特别，对任意的生成元 $\underline{v}$，

$$F(\exp tv\cdot x)=F(x),\quad t\in R.$$

即 $F(\exp tv\cdot x)$ 与 t 无关，从而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\exp tv\cdot x)=0,$$

特别，取 $t=0$，就得到

$$\underline{v}F(x)=0, x\in M.$$

充分性. 由 $\underline{v}F=0$ 在 M 上的所有的点成立，对任意的 G 的生成元 $\underline{v}$ 和 M 上的任一点 x，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\exp tv\cdot x)=\underline{v}F(\exp tv\cdot x)=0,\quad t\in R.$$

可知

$$F(\exp tv\cdot x)=F(x),$$

即 F 沿 G 的任一单参数子群的作用轨道不变.对李群 G,必有单位的邻域 U(例如法坐标域),使 U 中的任一元素 g,都有连接 G 的单位 e 和 g 的单参数子群,从而有

$$F(g \cdot x) = F(x), \quad g \in U. \tag{3.1.3}$$

由 G 是连通的假设,G 可由它的单位邻域 U 生成,因此,对 G 中任一元素 g,必有

$$g = g_1 g_2 \cdots g_l, \quad g_1, \cdots, g_l \in U.$$

由(3.1.3)应用归纳法即可证明

$$\begin{aligned} F(g \cdot x) &= F(g_1 g_2 \cdots g_l \cdot x) = F(g_1(g_2 \cdots g_l \cdot x)) \\ &= F(g_2 \cdots g_l \cdot x) = \cdots = F(x), \quad g \in G, \end{aligned}$$

即 F 是 G 的不变量.

不难看出此定理的一个几何的直观的解释,函数 F 是 G 的不变量必须且只须 F 沿 G 的任一单参数子群的作用轨道上的值都不变.

设 G 是 r 维的,$v_1, \cdots, v_r$ 是 G_e 的一组基,它们在 M 上的相应的向量场 $\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_\alpha$. 由定理 3.1.2,$F$ 是 G 的不变量必须且只须

$$\underline{v}_\alpha F = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, r. \tag{3.1.4}$$

在 M 的坐标域 $U:(x^i)$ 中,设

$$\underline{v}_\alpha = v_\alpha^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \alpha = 1, \cdots, r,$$

则条件(3.1.4)可具体表示为

$$v_\alpha^i(x) \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, r. \tag{3.1.5}$$

例 3.1.5 在例 3.1.1 中,G_c 的生成元 $\underline{v} = c\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}$,由 $\underline{v}F = 0$,即

$$c\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

可得 G_c 的不变量

$$F(x, y) = f(x - cy),$$

其中 f 是任意函数.

在例 3.1.2 中，G_α 的生成元 $\underline{v}=\frac{\partial}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial}{\partial y}$，由

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial F}{\partial y}=0,$$

即得 G_α 的不变量

$$F(x,y)=f(x^{-\alpha}y).$$

例 3.1.6 设 $M=R^2=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$，$G$ 为旋转群 $SO(2)$，其生成元 $\underline{v}=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}$，由

$$-y\frac{\partial F}{\partial x}+x\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

即得其不变量

$$F(x,y)=f(x^2+y^2).$$

例 3.1.7 设 $M=R^3$，G 的生成元为

$$\underline{v}=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}+(1+z^2)\frac{\partial}{\partial z}.$$

考察方程

$$-y\frac{\partial F}{\partial x}+x\frac{\partial F}{\partial y}+(1+z^2)\frac{\partial F}{\partial z}=0 \tag{3.1.6}$$

的特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{-y}=\frac{\mathrm{d}y}{x}=\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}.$$

不难得到它的两个独立的通积分

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad k=\arctan z-\arctan\frac{y}{x}.$$

它们都是 G 的不变量，取

$$\zeta=\tan k=\frac{zx-y}{zy+y},$$

它也是 G 的不变量. 于是，得到(3.1.6)的通解

$$F=f\left(\sqrt{x^2+y^2},\frac{zx-y}{zy+x}\right).$$

进一步，在 R^3 中作坐标变换

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x}, \\ \zeta = \dfrac{zx - y}{zy + x}, \end{cases}$$

直接计算即可得到$\underline{v}$在坐标系(r, θ, ζ)中的表示

$$\underline{v} = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

例 3.1.8 设 $M = R^3 - \{\{x = y = 0\} \cup \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}\}$,

$$\underline{v}_1 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\underline{v}_2 = 2xz \frac{\partial}{\partial x} + 2yz \frac{\partial}{\partial y} + (z^2 + 1 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial z}.$$

在 M 上,$\underline{v}_1$ 与$\underline{v}_2$ 处处线性无关,且不难验证$[\underline{v}_1, \underline{v}_2] = 0$,则必有以$\underline{v}_1$ 和$\underline{v}_2$ 为生成元的局部李变换群 G,其不变量 F 应满足条件$\underline{v}_1 F = 0$ 和$\underline{v}_2 F = 0$,即

$$-y \frac{\partial F}{\partial x} + x \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

$$2xz \frac{\partial F}{\partial x} + 2yz \frac{\partial F}{\partial y} + (z^2 + 1 - x^2 - y^2) \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

并可解得

$$F(x, y, z) = f\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

进一步,在 M 中作坐标变换:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x}, \\ \zeta = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{cases}$$

直接计算即可得到$\underline{v}_1$ 和$\underline{v}_2$ 在坐标系(r, θ, ζ)中的表示

$$\underline{v}_1 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \underline{v}_2 = 2r\sqrt{\zeta r - r^2 - 1} \frac{\partial}{\partial r}.$$

定义 3.1.5 M 上的一个方程组

$$F_\nu(x) = 0, \quad \nu = 1,\cdots,l$$

称为满秩(或有最大秩)的,如果矩阵$\left(\dfrac{\partial F_v}{\partial x^k}\right)$在方程的解集 φ_F 上的每一点的秩都为 l,即

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial F_v}{\partial x^k}\right)_x = l, \quad x \in \varphi_F.$$

这时,自然有 $l \leqslant m$,φ_F 为 M 的一个 $m-l$ 的维的子流形.

定理 3.1.3 设 G 是作用于 M 的连通的局部李变群,$F: M \to R^l$ 定义的方程组 $F=0$,即

$$F_\nu(x) = 0, \quad \nu = 1,\cdots,l$$

是满秩的,则 G 是这个方程组的不变群必须且只须对 G 的任一生成元 $\underline{v}$ 以及 φ_F 上任一点 x,

$$\underline{v} \cdot F_\nu(x) = 0, \quad \nu = 1,\cdots,l$$

成立.

证明 必要性.由 G 是方程 $F=0$ 的对称群,当 $x \in \varphi_F$ 时,对任意的 $g \in G$,

$$F_\nu(g \cdot x) = 0, \quad \nu = 1,\cdots,l.$$

特别,对任意的 G 的生成元 $\underline{v}$,

$$F_\nu(\exp \epsilon v \cdot x) = 0, \quad \nu = 1,\cdots,l.$$

进一步

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}F_\nu(\exp \epsilon v \cdot x)\right|_{\epsilon=0} = 0, \quad \nu = 1,\cdots l.$$

即

$$\underline{v} \cdot F_\nu(x) = 0, \quad x \in \varphi, \quad \nu = 1,\cdots,l.$$

充分性.设 x_0 是解集 φ_F 上的任一点,在 x_0 近傍取 M 的坐标系$(y^1,\cdots,y^l,y^{l+1},\cdots,y^m)$,使

$$y^\nu = F_\nu, \quad \nu = 1,\cdots,l,$$

$$y^k = x^k, \quad k = l+1,\cdots,n,$$

则$(y^{l+1},\cdots,y^m)$为 φ_F 局部坐标系.设$\underline{v}$是 G 的任一成元,它的坐标表示为

$$\underline{v} = \xi^1(y)\frac{\partial}{\partial y^1} + \cdots + \xi^m(y)\frac{\partial}{\partial y^m}.$$

由假设,在 φ_F 上$\underline{v}F_\nu = 0$,即有

$$\underline{v}y^\nu = 0, \quad \nu = 1,\cdots,l.$$

从而得到 $\xi^\nu(y)=0,\nu=1,\cdots,l$.于是,当 $y\in\varphi_F$ 时,

$$\underline{v}(y) = \xi^{l+1}\frac{\partial}{\partial y^{l+1}} + \cdots + \xi^m\frac{\partial}{\partial y^m}.$$

这就说明$\underline{v}(y)$都是 φ_F 的切向,即 φ_F 是这个 $m-l$ 维平面场的最高维积分流形.

设 $x(t)$是作用于 M 的G 的单参数子群 $\exp t\underline{v}$ 过x_0 的轨道,即 $x(t)=\exp t\underline{v}\cdot x_0$,它满足方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \underline{v}(x(t)),\\ x(0) = x_0,\end{cases}$$

由解的惟一性,$x(t)\in\varphi_F$.

由于 G 必有单位e 的邻域U 可由上述单位参数子群盖满.于是,当 $g\in U$ 时,$g\cdot x_0\in\varphi_F$,再由 G 的连通性,即可证当 $g\in G$ 时

$$g\cdot x_0\in\varphi_F,$$

所以 G 是方程 $F=0$ 的不变群.

例 3.1.9 设 $M=R^2$,$G=SO(2)$,即平面上的旋转群,相应的向量场

$$\underline{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

设 $F(x,y)=x^4+x^2y^2+y^2-1=(x^2+1)(x^2+y^2-1)$,这时

$$\underline{v}F = -2xy(x^2+1)^{-1}F(x,y),$$

因此 F 不是G 不变量,但当$(x,y)\in\varphi_F$ 时,$\underline{v}F=0$,且

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}\right)\bigg|_{\varphi_F} = (4x^3+2xy^2,2x^2y+2y)\bigg|_{\varphi_F}\neq(0,0),$$

即方程 $F=0$ 是满秩的.所以,G 是方程 $F=0$ 的不变群.

设 $H(x,y)=y^2-2y+1=(y-1)^2$,这时

$$\underline{v}H\mid_{\varphi_H}=2x(y-1)\mid_{\varphi_H}=0,$$

但

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x},\frac{\partial H}{\partial y}\right)\bigg|_{\varphi_H}=(0,2(y-1))\bigg|\varphi_H=(0,0),$$

方程 $H=0$ 不是满秩的.由定理不能断言 G 是方程 $H=0$ 的不变群,事实上,G 不是方程 $H=0$ 的不变群.

定理 3.1.4 设 $F:M\to R^l$ 在 $\varphi_F=\{x\in M\mid F(x)=0\}$ 上有最大秩,则 M 上的实值函数 f 在 φ_F 上为零必须且只须存在函数 $Q_1(x),\cdots,Q_l(x)$ 使

$$f(x)=Q_1(x)F_1(x)+\cdots+Q_1(x)F_l(x)$$

在 M 上成立.

证明 充分性显然,现证必要性.先证 $Q_\nu(x)(\nu=1,\cdots,l)$ 局部存在.

设 $x_0\overline{\in}\varphi_F$,则 $F_1(x_0),\cdots,F_l(x_0)$ 至少有一个不为零,不妨设 $F_\alpha(x_0)\neq 0(1\leqslant\alpha\leqslant l)$,则有 x_0 的邻域 U,使 $F_\alpha(x)$ 在 U 上恒不为零.取

$$Q_\alpha(x)=\frac{f}{F_\alpha},\quad Q_\nu(x)=0,\text{当 }\nu\neq\alpha,$$

则 $f=\sum_{\nu=1}^{l}Q_\nu(x)F_\nu(x)$ 在 U 上成立.

设 $x_0\in\varphi_F$,由方程 $F=0$ 有最大秩的假设,φ_F 必为 M 的 $m-l$ 维子流形,如定理 3.13 的证明,在 x_0 近傍取 M 的坐标系 V:$(y^1\cdots,y^l,y^{l+1},\cdots,y^m)$ 使 $(y^{l+1},\cdots,y^m)$ 为 φ_F 上的坐标,则 φ_F 在 V 中表示为

$$y^\nu=0,\quad \nu=1,\cdots,l.$$

设 m 是 $V\cap\varphi_F$ 中的任一点,其坐标为 $(0,\cdots,0,y_0^{l+1},\cdots y_0^m)$ 为任意固定的值.令

$$H_m=\{(y^1,\cdots,y^l,y_0^{l+1},\cdots,y_0^m)\}.$$

这是过 m 的一个 l 维子流形，点 m 对应 R^l 中的原点 $(0,\cdots,0)$. 由第一章§4 的引理 1.4.1，对 H_m 上的任意函数 $f(y^1,\cdots,y^l,y_0^{l+1},\cdots,y_0^m)$ 必有 H_m 上的函数 $Q_\nu(y^1,\cdots,y^l,y^{l+1}0,\cdots,y_0^m)(\nu=1,\cdots,l)$ 使

$$f(y^1,\cdots,y^l,y_0^{l+1},\cdots,y_0^m)=f(m)+\sum_{\nu=1}^{l}Q_\nu y^\nu.$$

由 f 在 φ_F 上为零的假设，$f(m)=0$，于是有 $f=\sum_{\nu=1}^{l}Q_\nu y^\nu$，即在 V 上 $f=\sum_{\nu=1}^{l}Q_\nu(x)F_\nu(x)$ 成立.

以上证明了在 M 的一点都有包含它的邻域，使在此邻域中存在 $Q_1(x),\cdots,Q_l(x)$ 使 $f=\sum_{\nu=1}^{l}Q_\nu F_\nu$ 成立. 进一步利用单位分解定理即可证明存在 M 上的函数 $Q_1(x),\cdots,Q_l(x)$ 使 $f=\sum_{\nu=1}^{l}Q_\nu F_\nu$ 成立.

由此定理和定理 3.1.3 立即可得下列定理.

定理 3.1.5 设 G 是作用于 M 的连通的局部李变换群，$F: M\to R^l$ 在 φ_F 上有最大秩，则 G 是方程 $F=0$ 的对称群必须且只须存在函数 $Q_{\nu\mu}(x)(\nu,\mu=1,2,\cdots,l)$，使

$$\underline{v}\cdot F_\nu(x)=\sum_{\mu=1}^{l}Q_{\nu\mu}(x)F_\mu(x),\quad \nu=1,\cdots,l \tag{3.1.6}$$

在 M 上成立.

(3.1.6)表示 $F_\nu(\nu=1,\cdots,l)$ 沿 $\underline{v}$ 的方向导数仍可用 $F_1,\cdots,F_l$ 表示，对此可观地解释为解流形上的点沿 $\underline{v}$ 的无穷小移动仍属于这个子流形.

定义 3.1.6 设 G 是作用于 M 的局部李变换群，M 的一个子集 φ 称为局部 G 不变的，如果对 φ 上的任一点 x，存在 G 的单位 e 的一个邻域 G_x 使对 G_x 中任意元素 g，$g\cdot x\in\varphi$ 成立.

若 U 是 M 的一开集，U 上的函数

$$F: U \to R$$

称为局部 G 不变的，如果对任一点 $x \in U$，存在如上所述的 G_x，对任一元素 $g \in G_x$，$F(g \cdot x) = F(x)$ 成立. 若上式对 G 中任一元素 g 成立，则 F 称为整体 G 不变的.

例 3.1.10 设 G 是 R^2 上沿 x 轴的平移所成之群，即

$$G: (x, y) \to (x + \varepsilon, y).$$

线段 $L = \{(x, y) \in R^2 \mid y = 0, -1 < x < 1\}$ 是局部 G 不变的，但不是整体 G 不变的.

定义在 $U = \{R^2 - (0, y) \mid y \geqslant 0\}$ 上的函数

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{当 } y \leqslant 0 \text{ 或 } y > 0, x > 0, \\ e^{-1/y}, & \text{当 } y > 0, x < 0 \end{cases}$$

是局部 G 不变的，但不是整体 G 不变的.

定理 3.1.6 微分流形 M 的子流形 N 是局 G 不变的必须且只须 $g_x \subset N_x$ 对 N 的每一点 x 和 G 中的每一元素 g 成立，其中 g_x 表示由 g 决定的单参数子群作用于 x 的轨道在 x 的切向量，N_x 为 N 在 x 的切空间.

换句话说，N 是局部 G 不变的必须且只须 G 的所有的生成元与 N 处处相切.

对给定的变换群，我们常要问它的不变量的个数. 由于不变量的任意函数仍是不变量，因此，确切的问题是它的独立不变量的个数.

定义 3.1.7 M 上的函数 $\zeta^1(x), \cdots, \zeta^k(x)$ 称为**函数相关**的，如果对 M 上的每一点 x，都有 x 的一个邻域 U 和一个在 R^k 的任一开集上都恒不为零的实函数 $F(z^1, \cdots, z^k)$，使当 $x \in U$ 时，

$$F(\zeta^1(x), \cdots, \zeta^k(x)) = 0.$$

$\zeta^1(x), \cdots, \zeta^k(x)$ 称为**函数独立**的，如果它们限制在 M 的任一开集 U 上都不是函数相关的，即若 $F(\zeta^1(x), \cdots, \zeta^k(x))$ 在某开集 U 上为零，则必有 F 在 U 上恒为零.

例 3.1.11 在 $M = \{(x, y) \in R^2 \mid y \neq 0\}$ 上，

$$\zeta^1(x,y)=\frac{x}{y},\quad \zeta^2(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

是函数相关的.

例 3.1.12 设 $M=R^2$,

$$\zeta^1(x,y)=x,\zeta^2(x,y)=\begin{cases}x, & \text{当 } y\leqslant 0,\\ x+\mathrm{e}^{-1/y}, & \text{当 } y>0,\end{cases}$$

它们在下半平面函数相关,面在上半平面函数独立.

由隐函数存在定理可知.

定理 3.1.7 设 $\zeta:M\to R^k$,即 $\zeta(x)=(\zeta^1(x),\cdots,\zeta^k(x))$,则$\zeta^1(x),\cdots,\zeta^k(x)$是函数相关的必须且只须对 M 的所有的点 x,$\mathrm{d}\zeta|_x$ 的秩小于 k.

设 G 是作用于 m 维微分流形 M 的 s 维局部李变换群.以下进一步假设 G 作用于每一点的轨道都是 s 维的子流形,即轨道的维数与群的维数相同.这时,G 的生成元构成 M 上的 s 维的对合平面场.

定理 3.1.8 设 G 是作用于 m 维微分流形 M 的 s 维局部李变换群,则对 M 的每一点 x_0 存在于 x_0 的邻域定义的 $m-s$ 个独立的局部不变量 $\zeta^1(x),\cdots,\zeta^{m-s}(x)$.并且,在 x_0 邻域的群的任一不变量 $\zeta(x)$均为它们的函数,即

$$\zeta(x)=F(\zeta^1(x),\cdots,\zeta^{m-s}(x)).$$

证明 由于轨道可看作是 s 维对合平面场的积分子流形,根据第一章 §10 的 Frobenius 定理,在 x_0 近旁可经坐标变换

$$y^\nu=\zeta^\nu(x),\quad \nu=1,\cdots,m-s,$$
$$y^\alpha=\zeta^\alpha(x),\quad \alpha=m-s+1,\cdots,m.$$

$(y^{m-s+1},\cdots,y^m)$为子流形上的局部坐标.这时,在每一轨道上,y^ν 即 $\zeta^\nu(x)(\nu=1,\cdots,m-s)$为常值.这就说明 $\zeta^1(x),\cdots,\zeta^{m-s}(x)$ 是 G 的局部不变量且是独立的.又若 ζ 是G 的一个不变量,它在每一轨道上的值必为常数.因此,它作为$(y^1,\cdots,y^m)$的函数必与$(y^{m-s+1},\cdots y^m)$无关,即它只能$(y^1,\cdots,y^{m-s})$即$(\zeta(x),\cdots,\zeta^{m-s}(x))$的函数,即 $\zeta(x)=F(\zeta^1(x),\cdots,\zeta^{m-s}(x))$.

由此定理可知，上述 $m-s$ 个独立的不变量就给出了 G 的全部不变量，我们称之为 G 的函数独立的**不变量完全组**.

定理 3.1.9 设 G 是作用于 m 维微分流形 M 上的 s 维局部李变换群，$\zeta^1(x),\cdots,\zeta^{m-s}(x)$ 是在 M 的开集 W 上的一个函数独立的不变量完全组，且 $\varphi_F=\{x\in W\mid F(x)=0\}$ 是 G 不变的，则对 φ_F 上的每一点 x_0，都有 x_0 的一个邻域 $\widetilde{W}(\subset W)$ 以及一个"等价的" G 不变函数 $\widetilde{F}(\zeta^1(x),\cdots,\zeta^k(x))$，它的解集与 F 的解集在 $\widetilde{W}$ 中一致.

证明 由于 $\zeta^1(x),\cdots,\zeta^{m-s}(x)$ 是函数独立的，不妨设

$$\det\left(\frac{\partial\zeta^\nu(x)}{\partial x^\mu}\right)\bigg|_{x=0}\neq 0\quad(\mu,\nu=1,\cdots,m-s),$$

于是在 x_0 近傍可作坐标变换

$$\begin{aligned}y^\nu&=\zeta^\nu(x),\quad &\nu&=1,\cdots,m-s,\\ y^a&=x^a,\quad &a&=m-s+1,\cdots,m.\end{aligned}$$

此变换也可简写成

$$y=\psi(x)=(\zeta(x),\tilde{x}),$$

其中 $\zeta(x)=(\zeta^1(x),\cdots,\zeta^{m-s}(x))$，$\tilde{x}=(x^{m-s+1},\cdots,x^m)$. 令 $F(x)=F^*(y)$，即 $F^*=F\circ\psi^{-1}$，它也是 $(\zeta(x),\tilde{x})$ 的函数. 再取

$$\widetilde{F}(x)=F^*(\zeta(x),\tilde{x}_0),$$

其中 $\tilde{x}_0$ 为 $\tilde{x}$ 在 x_0 的值，即为 $(x_0^{m-s+1},\cdots,x_0^m)$.

在 $(y^i)(i=1,\cdots,m)$ 坐标系中，G 的轨道是不变量的水平集 $y^\nu=c^\nu$，即

$$\zeta^\nu(x)=c^\nu,\quad \nu=1,\cdots,m-s,$$

其中 c^ν 为常数. 显然，$(\zeta(x),\tilde{x}_0)$ 与 $(\zeta(x),\tilde{x})$ 属于同一水平集，又因为 φ_F 是 G 不变的，$F^*(\zeta(x),\tilde{x}_0)=0$ 必须且只须 $F^*(\zeta(x),\tilde{x})=0$. 而满足 $F^*(\zeta(x),\tilde{x}_0)=0$ 的点集是 $\widetilde{F}(x)$ 在 $\widetilde{W}$ 中的解集，满足 $F^*(\zeta(x),\tilde{x})=0$ 的点集是 $F(x)$ 在 $\widetilde{W}$ 中的解集. 二者相同，即它们有相同的解集.

从方程的角度来看，此定理说明了，一个含有 m 个变元的方

程或方程组$F(x^1,\cdots,x^m)=0$,如果有一个 s 维的不变群G,则可经变量变换 $y=\psi(x)$,使方程简化为仅含有 $m-s$ 个变元的方程$F^*(y^1,\cdots,y^{m-s})=0$,其中 $y^\nu=\zeta^\nu(x)(\nu=1,\cdots,m-s)$是 G 的一个函数独立的不变量完全组.

例 3.1.13 设 $F(x,y)=x^4+x^2y^2+y^2-1=(x^2+1)(x^2+y^2-1)(m=2)$,$G=SO(2)(s=1)$是方程的不变群,它有不变量 x^2+y^2-1. 令

$$\begin{cases} z_1 = x^2+y^2-1, \\ z_2 = x, \end{cases}$$

则有

$$F(x,y) = F^*(z_1,z_2) = z_1(z_2^2+1).$$

取 $z^2=0$,则得到等价的方程

$$\widetilde{F}(z_1) = F^*(z_1,0) = z_1.$$

进一步的问题是,如何将有关代数方程的不变群的概念以及利用不变群的不变量以减少方程中变元的个数从而化简方程的思想和方法推广到微分方程.

§2 微分方程的不变群

设 φ 是一个微分方程组,它含有 p 个独立变量和 q 个因变量,分别表示为

$$x=(x^1,\cdots,x^p)\in X=R^p,$$
$$u=(u^1,\cdots,u^p)\in U=R^q,$$

方程的解则表示为

$$u^\alpha = f^\alpha(x^1,\cdots,x^p), \quad \alpha=1,\cdots,q,$$

或简写为

$$u=f(x).$$

定义 3.2.1 作用于 $X\times U$ 的开集M上的一个局部李变换群称为方组 φ 的一个不变群,如果它将 φ 的解变为 φ 的解.

这个定义的说法比较粗糙,因为 G 中元素是作用于 (x,u) 的,它能否将方程的解 $u=f(x)$ 经变换后仍具有这种函数形式?必须具体说明.

设函数 $u=f(x)$ 在 $X\times U$ 中的图像为

$$\Gamma_f=\{(x,f(x))\mid x\in\Omega\}\subset X\times U,$$

其中 $\Omega(\subset X)$ 为 f 的定义域. Γ_f 是 $X\times U$ 的 p 维子流形. 经 G 中元素 g 的作用, Γ_f 变为

$$g\circ\Gamma_f=\{(\tilde{x},\tilde{u})=g\circ(x,u)\mid(x,u)\in\Gamma_f\}.$$

一般的,它未必仍是一函数的图像,即 $\tilde{u}$ 未必可表示为 $\tilde{x}$ 的函数. 由于 G 的单位元素 e 的作用为恒同,则必有 e 的邻域,使在这邻域中的任意元素 g, $g\circ\Gamma_f$ 仍为函数图像,即有

$$\tilde{u}=\tilde{f}(\tilde{x}).$$

这样得到的函数 $\tilde{f}$ 称为函数 f 经 g 的变换,并记作

$$\tilde{f}=g\circ f.$$

例 3.2.1 设 $p=1=q$,即 $X=R=U$, $G=SO(2)$ 作用于 $X\times U=R^2$, G 中元素 θ 的作用为

$$\begin{aligned}\theta\cdot(x,u)&=(x\cos\theta-u\sin\theta,x\sin\theta+u\cos\theta)\\&=(\tilde{x},\tilde{u}).\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

若 $u=f(x)$ 定义于一个有限区间 $[a,b]$,当 θ 充分小时, $\theta\circ\Gamma_f$ 仍为一函数图像,从而得到函数 $\tilde{u}=\tilde{f}(\tilde{x})$,即 $\Gamma_{\tilde{f}}=g\circ\Gamma_f$. 特别,设

$$u=f(x)=ax+b$$

为线性函数,其图像为一直线. 经 θ 的作用即转动 θ,图像仍变为直线. 除垂直于 x 轴的情况,仍为一线性函数 $\tilde{f}(=\theta\circ f)$. 糙具体求出 $\tilde{f}$. 由(3.2.1), $\theta(x,ax+b)$ 变为

$$(\tilde{x},\tilde{u})=(x\cos\theta-(ax+b)\sin\theta,x\sin\theta+(ax+b)\cos\theta),$$

即

$$\tilde{x}=x\cos\theta-(ax+b)\sin\theta,\tag{3.2.2}$$

$$\tilde{u}=x\sin\theta+(ax+b)\cos\theta.\tag{3.2.3}$$

由(3.2.2)解得

$$x=(\tilde{x}+b\sin\theta)/(\cos\theta-a\sin\theta),$$

代入(3.2.3),即得 $\tilde{u}=\tilde{f}(\tilde{x})$,

$$\tilde{u}=\frac{\sin\theta+a\cos\theta}{\cos\theta-a\sin\theta}\tilde{x}+\frac{b}{\cos\theta-a\sin\theta}.$$

以上求 $\tilde{f}$ 的过程可概括为以下求 $\tilde{f}$ 的一般性的步骤.

设 G 中元素 g 的作用为

$$g:(x,u)\to(\tilde{x},\tilde{u})=(\Psi_g(x,u),\Phi_g(x,u)),$$

将 $u=f(x)$代入,则有

$$\tilde{x}=\Psi_g(x,f(x))=\Psi_g\circ(1\times f)(x),\qquad(3.2.4)$$

$$\tilde{u}=\Phi_g(x,f(x))=\Phi_g\circ(1\times f)(x),\qquad(3.2.5)$$

其中 1 表示恒同,要求 $\tilde{f}$ 只须从(3.2.4)中解出 x.由于 $\Psi_e\circ(1\times f)$为恒同,在 e 近傍 $\Psi_g\circ(1\times f)$不退化,于是可局部地解出

$$x=(\Psi_g\circ(1\times f))^{-1}\tilde{x}.$$

代入(3.2.5)则得到

$$\tilde{u}=(\Phi_g\circ(1\times f))\circ(\Psi_g\circ(1\times f))^{-1}\tilde{x}.$$

特别,若 g 的作用仅及于 x,即

$$g:(x,u)\to(\tilde{x},\tilde{u})=(\Psi_g x,u).$$

Ψ_g 是 X 上的微分同胚,且有

$$\Psi_g^{-1}=\Psi_{g^{-1}},$$

从而得到

$$x=\Psi_{g^{-1}}\tilde{x}.$$

代入 $u=f(x)$即得

$$\tilde{u}=(f\circ\Psi_{g^{-1}})\tilde{x},$$

即有

$$\tilde{f}=f\circ\Psi_{g^{-1}}.$$

例 3.2.2 设

$$g_\varepsilon:(x,u)\to(\tilde{x},\tilde{u})=(x+\varepsilon a,u),$$

其中 a 为常数,ε 为群的参数,则 $u=f(x)$变为

$$\tilde{u}=\tilde{f}(\tilde{x})=f\circ\Psi_{g^{-1}}(\tilde{x})=f(\tilde{x}-\varepsilon a).$$

例 3.2.3 设 $u=f(x,t)$,

$$g:(x,t,u)\to(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{u})=(x+2\varepsilon t,t,e^{-\varepsilon x-\varepsilon^2}u).$$

不难解得 Ψ_g 的逆,

$$\Psi_g^{-1}:(\tilde{x},\tilde{t})\to(x,t)=(\tilde{x}-2\varepsilon\tilde{t},\tilde{t}),$$

代入 $\tilde{u}=e^{-\varepsilon x-\varepsilon^2 t}f(x,t)$中即得到

$$\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t})=e^{-\varepsilon\tilde{x}+\varepsilon^2\tilde{t}}f(\tilde{x}-2\varepsilon\tilde{t},\tilde{t}).$$

在阐明了函数 $f(x)$经 G 中元素的作用以后,下面给微分方程组的不变群一个比较精确的定义.

定义 3.2.2 作用于 $X\times U$ 的开集M 上的一个局部李变换群G 称为微分方程组φ 的一个不变群,如果对 φ 的任意一解 $u=f(x)$, $\tilde{u}=(g\circ f)(\tilde{x})$也是 φ 的解.其中 g 是G 中的元素使$g\circ f$ 定义.

例 3.2.4 方程

$$u_t=u_{xx}$$

有不变群

$$g_\varepsilon:(x,t,u)\to(x+\varepsilon a,t+\varepsilon b,u),\quad \varepsilon\in R,$$

其中 a,b 为任意常数.由此可知,若 $u=f(x,t)$是方程的群,则 $u=f(x-\varepsilon a,t-\varepsilon b)$也是方程的解.

不难验证,在例 3.2.2 中的

$$g_\varepsilon:(x,t,u)\to(x+2\varepsilon t,t,e^{-\varepsilon x+\varepsilon^2 t}u)$$

也是方程不变群.由此可知,若 $u=f(x,t)$是方程的解,则 $u=e^{-\varepsilon x-\varepsilon^2 t}f(x-2\varepsilon t,t)$也是方程的解.特别,由方程的一个显然解 $u=c$(c 为任意常数),则可得到方程的解

$$u=ce^{-\varepsilon x+\varepsilon^2 t}.$$

例 3.2.5 KdV 方程

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x$$

有不变群

$$g_\varepsilon:(x,t,u)\to\left(x-3t\varepsilon,t,u+\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

由此可知,若 $u=f(x,t)$是方程的解,则

$$u=f(x+3t\varepsilon,t)+\frac{\varepsilon}{2}$$

也是方程的解.特别,若 $u=f(x)$是方程的不依赖于 t 的解,即所谓稳定解,则由上述不变性可知

$$u=f(x+3t\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{2}$$

也是方程的解.显然,这是方程的一个行波解.上述不变性也给出了方程的稳定解和行波解之间的关系.

§3 延 拓

在定义了微分方程的不变群以后,进一步的问题是如何将关于代数方程的不变群的一些结论推广到微分方程的不变群.一个自然的想法是将自变量和因变量空间 $X\times U$ 进一步延拓.在这个延拓空间中,不仅自变量和因变量,而且因变量对自变量的各阶导数都看成空间的变元,从而将 $X\times U$ 中的微分方程看成是延拓空间中的代数方程,并进一步将本章第一节中的有关讨论移植到延拓空间.

首先,我们对空间 $X\times U$ 进行延拓.考虑函数

$$f(x)=f(x^1,\cdots,x^p),$$

即

$$f:R^p\to R,$$

它具有 $P_k\equiv C_{p+k-1}^k$个不同的 k 阶偏导数,并记作

$$\partial_J f(x)=\frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_k}},$$

其中 $J=(j_1,\cdots,j_k)$,$1\leqslant j_k\leqslant p$,$k$ 称为J 的重数.

一般的,若

$$f:X(\subset R^p)\to U(\subset R^q),$$

即

$$u=(u^1,\cdots,u^q)=f(x)=(f^1(x^1,\cdots,x^p),\cdots,f^q(x^1,\cdots,x^p)),$$

则 $u^\alpha(\alpha=1\cdots,q)$具有 qp^k 个不同的k 阶偏导数

$$u_J^\alpha=\partial_J f^\alpha(x).$$

令

$$U_k=\{u_J^\alpha\},$$

其中 $\alpha=1,\cdots,q,J$ 的重数为k,而

$$U^{(n)}=U\times U_1\times U_2\times\cdots\times U_n,$$

即 $U^{(n)}$中的元素为

$$(u^\alpha,u_{J_1}^\alpha,\cdots,u_{J_n}^\alpha),$$

其中 $\alpha=1,\cdots,q,J_k(k=1,\cdots,n)$的重数为 k,并常将上元素简记为(u_J^α),J 表示由到0到 n 的各阶多重无序指标,$u_{J_0}^\alpha=u^\alpha$.

显然,U_k 是qp_k 维的,而 $U^{(n)}$的维数则为

$$\begin{aligned}q(1+p_1+\cdots+p_n)&=q(c_p^0+c_p^1+c_{p+1}^2+c_{p+n-1}^n)\\&=q(c_{p+1}^1+c_{p+1}^2+\cdots+c_{p+n-1}^n)=qc_{q+n}^n,\end{aligned}$$

并记作 $qp^{(n)}$.

例 3.3.1 设 $p=2,q=1,X=R^2=\{(x^1,x^2)\}=\{(x,y)\}$, $U=R^1=\{(u)\}$,则

$$U_1=\{(u_x,u_y\},\quad U_2=\{(u_{xx},u_{xy},u_{yy})\},$$

$$U_3=\{(u_{xxx},u_{xxy},u_{xyy},u_{yyy})\}.$$

而

$$\begin{aligned}U^{(3)}&=U\times U_1\times U_2\times U_3\\&=\{(u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy},u_{xxx},u_{xxy},u_{xyy},u_{yyy})\}.\end{aligned}$$

定义 3.3.1 $X\times U^{(n)}$称为 $X\times U$ 的n 阶延拓,也称为底 $X\times U$ 上的射流(jet)空间.

定义 3.3.2 给定函数 $u=f(x)$,即

$$f:X\to U,$$

则由它诱导的函数

$$u^{(n)}=\{u_J^\alpha\}=\{\partial_J u^\alpha\}$$

(J 的重数由 0 到 n)称为 f 的第 n 阶延拓,记作 $pr^{(n)}f(x)$,即

$$pr^{(n)}f: X \to U^{(n)}.$$

例 3.3.2 在上例中,设 $u=f(x,y)$,则它的二阶延拓 $u^{(2)}=pr^{(2)}f(x,y)$为

$$(u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = \left(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

可见,$f(x)$的 n 阶延拓 $pr^{(n)}f(x)$就相当于 f 在 x 的 n 次 Taylor 展开.

通常,我们仅有兴趣于定义于开集 $M(\subset X\times U)$上的微分方程,M 的相应的 n 阶延拓空间为

$$M^{(n)} = M \times U_1 \times \cdots U_n,$$

设 φ 是包含 p 个独立变量和 q 个因变量的微分方程组

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \cdots, l, \tag{3.3.1}$$

其中 $x=(x^1,\cdots x^p)\in X$, $u=(u^1,\cdots,u^q)\in U$, $u^{(n)}\in U^{(n)}$. 令

$$\Delta(x, u^{(n)}) = (\Delta_1(x, u^{(n)}), \cdots, \Delta_l(x, u^{(n)})),$$

即

$$\Delta: X \times U^{(n)} \to R^l,$$

则方程组(3.3.1)可简写为

$$\Delta(x, u^{(n)}) = 0. \tag{3.3.2}$$

从 $X\times U$ 的延拓空 $X\times U^{(n)}$看,方程(3.3.2)可看成一个代数方程. 方程组 φ 就相当于映射Δ 在何处为零,它们决定 $X\times U^{(n)}$上的一个子流形

$$\varphi_\Delta = \{(x, u^{(n)}) \mid \Delta(X, u^{(n)}) = 0\} \subset X \times U^{(n)},$$

这样,方程组的一个解就是一个函数 $u=f(x)$,使

$$\Delta(x, pr^{(n)}f(x)) = 0,$$

即 $f(x)$的各阶偏导数满足由 φ 决定的一个约束条件,也就是说 $f(x)$的延拓函数 $pr^{(n)}f(x)$的图像必在 φ_Δ 中:

$$\Gamma_f^{(n)} \equiv \{(x, pr^{(n)}f(x))\} \subset \varphi_\Delta = \{\Delta(x, u^{(n)}) = 0\}.$$

例 3.3.3 Laplace 方程

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

$p=2, q=1, X\times U^{(2)}=(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})$. 函数 $u=f(x,y)$是方程的解必须且只须$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$,或 $pr^{(2)}f(x,y)\subset \varphi_\Delta$. 例如,取

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2,$$

则有

$$pr^{(2)}f(x,y) = (x^3-3xy^2, 3x^2-3y^2, -6xy, 6x, -6y, -6x).$$

由 $6x+(-6x)=0$, $pr^{(2)}f(x,y)\subset\varphi_\Delta$. 所以, x^3-3xy^2 是方程的解.

总之,在空间 $X\times U$ 上的一个 n 阶微分方程组可以看作是 $X\times U$的 n 阶延空间 $X\times U^{(n)}$上的一个代数方程组,微分方程的解集可以看成是延拓空间上的一个子流形 φ_Δ,微分方程的一个不变群可看成延拓空间中保持 φ_Δ 不变的群. 这样就自然产生一个问题,我们如何将作用于 $X\times U$ 的开集 M 上的变换群延拓到 M 的 n 阶延拓空间$M^{(n)}$上. 这就是作用群的**延拓**.

设 G 是作用于$X\times U$ 的开集 M 上的一个局部李变换群,由它诱导的在 M 的第 n 阶延拓空间$M^{(n)}$上的作用称为 **G 的集 n 阶延拓**,记作 $pr^{(n)}G$. 下面具体说 $pr^{(n)}G$ 在 $M^{(n)}$上的作用. 设 $g\in G$,

$$g:(x,u)\to(\tilde{x},\tilde{u}),(x,u)\in M,$$

经 g 的作用, $u=f(x)$变为 $\tilde{u}=\tilde{f}(\tilde{x})$,则延拓群的作用具体决定于 $u=f(x)$的各阶偏导数与 $\tilde{u}=\tilde{f}(x)$的各阶偏导数之间的变换关系.

设$(x_0,u_0^{(n)})\in M^{(n)}$,现构造一个定义于 x_0 近傍的函数 $u=f(x)$,其图像在 M 上,且具有给定的它在 x_0 的各阶偏导数,即

$$u_0^{(n)} = pr^{(n)}f(x_0)$$

这样的函数不是惟一的,自然的可取 f 为对应于给定值 $u_0^{(n)}$ 的 n 阶 Taylor 多项式,即

$$f(x) = (f^1(x)\cdots,f^l(x)),$$

其中

$$f^{\alpha}(x) = \sum_{J} \frac{(u_J^{\alpha})_0}{\widetilde{J}!}(x - x_0)^J, \quad \alpha = 1,\cdots,l$$

式中和式对所有的多重指标 $J=(j_1,\cdots,j_k)$,$0\leqslant k\leqslant n$,

$$(x - x_0)^J = (x^{j_1} - x_0^{j_1})(x^{j_2} - x_0^{j_2})\cdots(x^{j_k} - x_0^{j_k}),$$

$$\widetilde{J} = (\widetilde{j},\cdots,\widetilde{j}_p),$$

$\widetilde{j}_i(0\leqslant i\leqslant p)$表 j_i 的个数,而 $\widetilde{J}! = \widetilde{j}_1!\ \widetilde{j}_2!\ \cdots\widetilde{j}_p!$

例如,若 $J=(1,1,1,2,4,4,)$,$p=4$,$k=6$,则

$$\partial_J f = \frac{\partial^6 f}{(\partial x^1)^3\partial x^2(\partial x^4)^2},$$

$$\widetilde{J} = (3,1,0,2),$$

$$\widetilde{J}! = 3!1!0!2! = 24.$$

设 g 是G 的单位e 近傍的元素,函数 $f(x)$在 x_0 近傍定义,且有 $\widetilde{f}=g\circ f$ 定义于$(\widetilde{x}_0,\widetilde{u}_0)=g\circ(x_0,u_0)$的近傍,其中 $u_0=f(x_0)$是 $u_0^{(n)}$ 的零阶支量,则 g 的第 n 阶延拓 $pr^{(n)}g$ 在$(x_0,u_0^{(n)})$的作用为

$$pr^{(n)}g:(x_0,u_0^{(n)}) \to (\widetilde{x}_0,\widetilde{u}_0^{(n)}),$$

其中

$$\widetilde{u}_0^{(n)} = pr^{(n)}(g\circ f)(\widetilde{x}_0)$$

不难看出,$pr^{(n)}g(x_0,u_0^{(n)})$仅依赖于 f 在x_0 的直到 n 阶的各阶偏导数,而与所选择的函数无关.

进一步,对在 G 的单位近傍的g_1,g_2,

$$(pr^{(n)}g_1)\circ(pr^{(n)}g_2)(x_0,u_0^{(n)}) = (pr^{(n)}g_1g_2)(x_0,u_0^{(n)}),$$

因此 $pr^{(n)}G$ 是$X\times U^{(n)}$局部作用群.

例 3.3.4 设 $p=1=q$,$X\times U=R^2$,$G=SO(2)$是 R^2 上的旋转群,则 G 的一次延拓 $pr^{(1)}G$ 作用于$X\times U^{(2)}=R^3$. 下面给出具体的作用.

首先,对任意的函数 $f(x)$,$pr^{(1)}f(x)=(f(x),f'(x))$. 其次,设$(x^0,u^0,u_x^0)\in X\times U^{(1)}$,$\theta$(旋转角)是 $SO(2)$中的任一元

素，

$$pr^{(1)}\theta(x^0,u^0,u_x^0)=(\tilde{x}^0,\tilde{u}^0,\tilde{u}_x^0)$$

为确定$(\tilde{x}^0,\tilde{u}^0,\tilde{u}_x^0)$，选取一次 Taylor 多项式

$$f(x)=u^0+u_x^0(x-x^0)$$

$(f(x_1^0)=u_1^0,f'(x_1^0)=u_x^0)$，并进一步求 $\tilde{f}(\tilde{x})$，即 $\theta\circ f(\tilde{x})$. 由例 3.2.1，

$$\tilde{f}(\tilde{x})=\theta\circ f(\tilde{x})=\frac{\sin\theta+u_x^0\cos\theta}{\cos\theta-u_x^0\sin\theta}\tilde{x}+\frac{u^0-u_x^0x^0}{\cos\theta-u_x^0\sin\theta}.$$

为使函数定义，只须 $\cot\theta\neq u_x^0$. 于是有

$$\tilde{x}^0=x^0\cos\theta-u^0\sin\theta,$$

$$\tilde{u}^0=\tilde{f}(x^0)=x^0\sin\theta+u^0\cos\theta,$$

$$\tilde{u}_x^0=\tilde{f}'(\tilde{x}^0)=\frac{\sin\theta+u_x^0\cos\theta}{\cos\theta-u_x^0\sin\theta},$$

这样就得到了延拓 $pr^{(1)}G$ 在 $X\times U^{(1)}$ 上的作用：

$$pr^{(1)}\theta\cdot(x,u,u_x)=\left(x\cos\theta-u\sin\theta,x\sin\theta+u\cos\theta,\frac{\sin\theta+u_x\cos\theta}{\cos\theta-u_x\sin\theta}\right),\quad|\theta|<|\arctan u_x|.$$

注意，$SO(2)$在 $X\times U$ 上的作用是线性的和整体的，而 $pr^{(2)}SO(2)$在 $X\times U^{(1)}$作用是非线性和局部的. 此外，$pr^{(1)}\theta$ 对(x,u)的作用同于 θ 对(x,u)的作用，这说明，$pr^{(1)}\theta$ 确实是 θ 的延拓，这一事实具有一般性.

设 $M^{(k)}$和 $M^{(n)}$分别表示 M 的第 k 阶和与 n 阶延拓，$k\leqslant n$ 则有自然投影

$$\pi_k^n:M^{(n)}\to M^{(k)},$$

使

$$(x,u^{(n)})\to(x,u^{(k)}).$$

这时，自然有延拓群的投影，即对 $g\in G$ 有

$$\pi_k^n pr^{(n)}g=pr^{(k)}g,$$

并且，

$$\pi_k^n: pr^{(n)}G \to pr^{(k)}G$$

为一同态.

现在再回到微分方程,前面已经说明,$X \times U$ 上的一个 n 阶微分方程组就相当于 $X \times U$ 的 n 阶延拓空间 $X \times U^{(n)}$ 上的一个子流形 φ_Δ. 因此,进一步的问题就是建立微分方程的不变群 G 与相应的 φ_Δ 在延拓群 $pr^{(n)}G$ 的作用下不变性之间的关系.

定理 3.3.1 设 M 是 $X \times U$ 的开集,

$$\Delta(x, u^{(n)}) = 0 \tag{3.3.3}$$

是 M 上的一个 n 阶微分方程组,相应的子流形 $\varphi_\Delta(\subset M^{(n)})$, G 是作用于 M 的局部变换群,其延拓群 $pr^{(n)}G$ 保持 φ_Δ 不变,则 G 是微分方程组(3.3.3)的不变群.

证明 设 $u = f(x)$ 是(3.3.3)的解,即有

$$\Gamma_f^{(n)} = (x, pr^{(n)}f(x)) \subset \varphi_\Delta,$$

若 $g \in G$,且使 $g \circ f$ 不变,则由定理中 $pr^{(n)}G$ 保持 φ_Δ 不变的假设,

$$\Gamma_{g \circ f}^{(n)} = \{pr^{(n)}g(x, f(x))\} = pr^{(n)}g \circ \Gamma_f^{(n)} \subset \varphi_\Delta,$$

即 $pr^{(n)}(g \circ f)$ 的图像在 φ_Δ 中,也就是说 $g \circ f$ 仍是方程组(3.3.3)的解. 所以 G 是 n 阶微分方程组(3.3.3)的不变群.

例 3.3.5 设 $X = \{(x, y)\} = R^2$, $U = \{(u)\} = R^1$, G 在 $X \times U$ 上的作用为

$$g: (x, y, u) \to (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}) = (\lambda x, \lambda y, u), \quad g \in G,$$

λ 为正常数. 考虑微分程

$$u_x^2 + u_y^2 + u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{3.3.4}$$

在 $X \times U^{(2)}$ 中,

$$\begin{aligned} pr^{(2)}g: &(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) \\ &\to (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{u}_{\tilde{x}}, \tilde{u}_{\tilde{y}}, \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}, \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{y}}, \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}}) \\ &= \left(\lambda x, \lambda y, u, \frac{1}{\lambda}u_x, \frac{1}{\lambda}u_y, \frac{1}{\lambda^2}u_{xx}, \frac{1}{\lambda^2}u_{xy}, \frac{1}{\lambda^2}u_{yy}\right), \end{aligned}$$

φ_Δ 是 $X \times U^{(2)}$ 中由方程(3.3.4)决定的子流形. 由

$$\tilde{u}_{\tilde{x}}^2 + \tilde{u}_{\tilde{y}}^2 + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}} = \frac{1}{\lambda^2}(u_x^2 + u_y^2 + u_{xx} + u_{yy})$$

可见,φ_Δ 经 $pr^{(2)}G$ 不变.所以,G 是方程(3.3.4)的不变群.

在本章§1中,在处理有关代数方程的不变群的某些问题时,有时我们只须知道群的相应的向量场即生成元.因此,我们还需要研究延拓群的向量场,也称为**向量场的延拓**.

定义 3.3.3 设 M 是 $X\times U$ 的开集,$\underline{v}$是M 上的向量场,相应的局部单参数变换群为 $\exp\varepsilon\,\underline{v}$的第 n 阶延拓群 $pr^{(n)}\exp\underline{v}$(作用于 $M^{(n)}$)所对应的向量场称为$\underline{v}$的第 n 阶延拓,记作 $pr^{(n)}\underline{v}$.

由定义,

$$pr^{(n)}\underline{v}(x,u^{(n)}) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}pr^{(n)}\exp\varepsilon\underline{v}\right)\Big|_{\varepsilon=0}(x,u^{(n)}),\quad (x,u^{(n)})\in M^{(n)}.$$

例 3.3.6 设 $p=1=q$, $X\times U=R^2$,

$$\underline{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u},$$

$$\exp\varepsilon\,\underline{v}(x,u) = (x\cos\varepsilon - u\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + u\cos\varepsilon),$$

由例 3.3.4,

$$pr^{(1)}\exp\varepsilon\,\underline{v}(x,u,u_x)$$
$$= \left(x\cos\varepsilon - u\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + u\cos\varepsilon, \frac{\sin\varepsilon + u_x\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon - u_x\sin\varepsilon}\right),$$

所以

$$pr^{(1)}\underline{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}(pr^{(1)}\exp\varepsilon\,\underline{v}(x,u,u_x))\Big|_{\varepsilon=0} = (-u, x, 1+u_x^2),$$

即

$$pr^{(1)}\underline{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1+u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x}.$$

进一步,我们就可以将本章第一节中有关利用群的生成元来判别群是否方程的不变群的讨论应于 M 的延拓空间 $M^{(n)}$,从而建立微分方程和它的不变群的向量场之间的关系.

定义 3.3.4 n 阶微分方程组

$$\Delta_\nu(x,u^{(n)}) = 0,\quad \nu = 1,\cdots,l$$

称为具有最大秩的，如果 $l\times(p+pq^{(n)})$ Jacobi 矩阵

$$J_{\Delta}(x,u^{(n)})=\left(\frac{\partial\Delta_{\nu}}{\partial x^{\nu}},\frac{\partial\Delta_{\nu}}{\partial u_{J}^{a}}\right)$$

在 φ_{Δ} 上的所有点的秩均为 l.

例 3.3.7 Laplace 方程

$$\Delta=u_{xx}+u_{yy}=0$$

有最大秩($l=1$)，这是因为在

$$X\times U^{(2)}:(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})$$

上

$$J_{\Delta}=(0,0,0,0,0,1,0,1)$$

的秩为 1. 但与之等价的方程

$$\tilde{\Delta}=(u_{xx}+u_{yy})^2=0$$

却不具有最大秩，因为

$$J_{\tilde{\Delta}}=(0,0,0,0,0,2(u_{xx}+u_{yy}),0,2(u_{xx}+u_{yy}))$$

在 $\varphi_{\tilde{\Delta}}$ 上的秩处处为零.

定理 3.3.2 设

$$\Delta_{\nu}(x,u^{(n)})=0,\quad \nu=1,\cdots,l$$

是定义 $X\times U$ 的开集 M 上的微分方程组，且具有最大秩，G 是作用于 M 的局部变换群，且当 $(x,u^{(n)})\in\varphi_{\Delta}$ 时，

$$pr^{(n)}\underline{v}(\Delta_{\nu}(x,u^{(n)}))=0,\quad \nu=1,\cdots,l$$

对 G 的任一生成元 $\underline{v}$ 都成立，则 G 是这个方程组的不变群.

证明 由本章§1 中的定理 3.1.3，$pr^{(n)}G$ 的作用保持 φ_{Δ} 不变. 再由定理 3.3.1，G 是方程组不变群.

例 3.3.8 考虑一阶常微分方程

$$\Delta(x,u,u_x)=(u-x)u_x+u+x=0,\qquad(3.3.5)$$

这时，$X\times U^{(1)}=R^3$，

$$J_{\Delta}=\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x},\frac{\partial\Delta}{\partial u},\frac{\partial\Delta}{\partial u_x}\right)=(1-u_x,1+u_x,u-x)$$

有最大秩. 设 $G=SO(2)$，则有

$$pr^{(1)}\underline{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1+u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x},$$

$$pr^{(1)}\underline{v}(\Delta) = -u\frac{\partial\Delta}{\partial x} + x\frac{\partial\Delta}{\partial u} + (1+u_x^2)\frac{\partial\Delta}{\partial u_x}$$

$$= u_x((u-x)u_x + u + x) = u_x\Delta.$$

显然，当 $\Delta=0$ 时 $pr^{(1)}\underline{v}(\Delta)=0$. 所以，$G$ 是方程(3.3.5)的不变群. 这就是说，若 $u=u(x)$是方程(3.3.5)的解，则由方程组

$$\widetilde{x} = x\cos\varepsilon - u(x)\sin\varepsilon,$$

$$\widetilde{u} = x\sin\varepsilon + u(x)\cos\varepsilon.$$

解得的 $\widetilde{u}=\widetilde{u}(x,\epsilon)$也是方程(3.3.5)的解. 事实上，令

$$x = r\cos\theta, u = r\sin\theta,$$

则方程(3.3.5)就化为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r.$$

显然，$SO(2)$是它的不变群. $r=\mathrm{e}^{\theta}$ 是方程的一个特解，经任意的转动 ε，$r=\mathrm{e}^{\theta+\varepsilon}$也是方程的解.

如何求给定向量场的延拓向量场？在定义中和例 3.3.7 中都是通过相应的群的延拓给出的，而求延拓群一般都是比较麻烦的，需要进一步解决的问题是，如果何由给定的向量场 $\underline{v}$ 直接求得它的延拓向量场，即如何由给定的 M 上的向量场

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{p}\xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\phi_\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

确定它的 n 阶延拓向量场

$$pr^{(n)}\underline{v} = \sum_{i=1}^{p}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{J}\phi_\alpha^J\frac{\partial}{\partial u_J^q},$$

式中 J 的重数 l 在 0 到 n 之间，即 $0\leqslant l\leqslant n$，ξ^i，ϕ_α^J 是 x，u_J^q 的函数.

由于群 G 的 n 阶延拓的 k 阶自然投影 π_k^n 是它的 k 阶延拓，即

$$\pi_k^n pr^{(n)}g = pr^{(k)}g, \quad g\in G,$$

其切映射$(\pi_k^n)_*$使

$$(\pi_k^n)_* pr^{(n)}\underline{v} = pr^{(k)}\underline{v},$$

由此立即可知,

$$\xi^i = \xi^i(x,u), \phi_\alpha^0 = \phi_\alpha(x,u).$$

以及$\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}$的系数只使赖于$x,u$以及$u$的直到$l$阶的导数($l$为$J$的重数),并且,延拓可以逐阶进行.

为简单计并不失一般性,假设G是单参数变换群,并由特殊到一般逐步导出延拓向量场的计算公式.

1. 设单参数群$G=\{g_\varepsilon|\varepsilon\in R\}$的作用仅及方程中的自变量,即

$$(\tilde{x},\tilde{u}) = g_\varepsilon(x,u) = (\Psi_\varepsilon(x),u)(x,u)\in M\subset X\times U,$$

相应的向量场为

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{p}\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

其中

$$\xi^i(x) = \left.\frac{\mathrm{d}\Psi_\varepsilon^i(x)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_\varepsilon = 0, \quad i = 1\cdots,p.$$

进一步假设$q=1$,这时

$$M^{(1)}:(x,u^{(1)}) = (x^i,u,u_j), u_j = \frac{\partial u}{\partial x^j}, \quad i,j = 1,\cdots,p.$$

又

$$pr^{(1)}g_\varepsilon(x,u^{(1)}) = (\tilde{x},\tilde{u}^{(1)}),$$

其中

$$\tilde{x} = \Psi_\varepsilon(x), x = \Psi_\varepsilon^{-1}(\tilde{x}) = \Psi_{-\varepsilon}(\tilde{x}),$$

$$\tilde{u} = \tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = f(\Psi_{-\varepsilon}(\tilde{x})) = u,$$

$$\tilde{u}_j = \frac{\partial\tilde{f}_\varepsilon}{\partial\tilde{x}^j}(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{P}\frac{\partial f}{\partial x^k}(\Psi_{-\varepsilon}(\tilde{x}))\frac{\partial\Psi_{-\varepsilon}^k}{\partial\tilde{x}^j}(\tilde{x}).$$

由此得到$(u_k)\rightarrow(\tilde{u}_k)$的变换关系

$$\widetilde{u}_j = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \Psi^k_{-\varepsilon}(\widetilde{x})}{\partial \widetilde{x}^j}(\Psi_\varepsilon(x))u_k, \quad j = 1,\cdots,p,$$

并进一步有

$$pr^{(1)}\underline{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{p} \phi^j(x,u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u_j},$$

其中

$$\phi^j(x,u^{(1)}) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\sum \frac{\partial \Psi^k_{-\varepsilon}(\widetilde{x})}{\partial \widetilde{x}^j}(\Psi_\varepsilon(x))\right)\bigg|_{\varepsilon=0} u_k.$$

又由于

$$\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^j}\left(\frac{\mathrm{d}\Psi^k_{-\varepsilon}}{\mathrm{d}\varepsilon}(\Psi_\varepsilon(x))\right)\bigg|_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\mathrm{d}\Psi^k_{-\varepsilon}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\right)(x) = -\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}(x),$$

$$\sum_{l=1}^{p} \frac{\partial^2 \Psi^k_{-\varepsilon}}{\partial \widetilde{x}^j \partial \widetilde{x}^l}(\Psi_{-\varepsilon}(x))\frac{\mathrm{d}\Psi^l_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}(x)\bigg|_{\varepsilon=0} = 0,$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\frac{\partial \Psi^k_{-\varepsilon}(\widetilde{x})}{\partial \widetilde{x}^j}\right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial \Psi^k_{-\varepsilon}(\widetilde{x})}{\partial \widetilde{x}_j}\right) + \frac{\partial^2 \Psi^k_{-\varepsilon}(\widetilde{x})}{\partial \widetilde{x}^j \partial \widetilde{x}^l}\frac{\mathrm{d}\Psi^l_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon},$$

就得到

$$\phi^j(x,u,u_x) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}u_k.$$

于是有延拓公式

$$pr^{(n)}\underline{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^j} - \sum_{j,k=1}^{p} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}u_k\frac{\partial}{\partial u_j}. \tag{3.3.6}$$

例 3.3.9 设 $p=2, q=1, X=\{(x,y)\}, U=\{(u)\}$,

$$\underline{v} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

则由(3.3.6)可得

$$pr^{(1)}\underline{v} = \underline{v} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^y\frac{\partial}{\partial u_y},$$

其中

$$\phi^x = -\frac{\partial \xi}{\partial x}u_x - \frac{\partial \eta}{\partial x}u_y, \quad \phi^y = \frac{\partial \xi}{\partial y}u_x - \frac{\partial \eta}{\partial y}u_y.$$

例如，在 $X\times U$ 上的旋转群

$$g_\varepsilon:(x,y,u)\to(x\cos\varepsilon-y\sin\varepsilon,x\sin\varepsilon+y\cos\varepsilon,u),$$

相应的

$$\underline{v}=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}$$

$(\xi=-y,\eta=x)$，于是

$$pr^{(1)}\underline{v}=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}-u_y\frac{\partial}{\partial u_x}+u_x\frac{\partial}{\partial u_y},$$

而

$$pr^{(1)}g_\varepsilon:(x,y,u,u_x,u_y)\to(x\cos\varepsilon-y\sin\varepsilon,x\sin\varepsilon+y\cos\varepsilon,$$
$$u_x\cos\varepsilon-u_y\sin\varepsilon,u_x\sin\varepsilon+u_y\cos\varepsilon).$$

2. G 的作用仅及于因变量，即

$$(\tilde{x},\tilde{u})=g_\varepsilon\circ(x,u)=(x,\Phi_\varepsilon(x,u))\in M.$$

相应向量场为

$$\underline{v}=\phi(x,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

其中

$$\phi(x,u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Phi_\varepsilon(x,u)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

若 $u=f(x)$，则有

$$\tilde{u}=\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x})=\Phi_\varepsilon(x,f(x)),$$
$$pr^{(1)}g_\varepsilon(x,u^{(1)})=(x,\tilde{u}^{(1)}),$$
$$\tilde{u}_j=\frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial x^j}+u_j\frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial u}\quad j=1,\cdots,k.$$

于是

$$pr^{(1)}\underline{v}=\underline{v}+\phi^j(x,u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u^j},$$

其中

$$\phi^j(x,u^{(1)})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\tilde{u}_j\Big|_{\varepsilon=0}=\frac{\partial\phi}{\partial x^j}+u_j\frac{\partial\phi}{\partial u},$$

于是得到延拓公式

$$pr^{(1)}\,\underline{v} = \phi(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^j} + u_j\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial u_j}. \quad (3.3.7)$$

例 3.3.10 设 $X=\{(x,y)\}$，$U=\{(u)\}$，

$$\underline{v} = xu^2\frac{\partial}{\partial u},$$

则由(3.3.7)即得

$$pr^{(1)}\,\underline{v} = xu^2\frac{\partial}{\partial u} + (u^2 + 2xuu_x)\frac{\partial}{\partial u_x} + 2xuu_y\frac{\partial}{\partial u_y}.$$

下面将导出求延拓向量场的一般公式.为此，先引进全导数的概念.

定义 3.3.5 设 $x=(x^1\cdots,x^p)$，$u=(u^1,\cdots,u^q)$，$P(x,u^{(n)})$是定义 $M^{(n)}$上的函数，则 P 对 x^i 的全导数 D_iP 是 $M^{(n+1)}$ 上惟一决定的函数

$$D_iP(x,pr^{(n+1)}f(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i}(P(x,pr^{(n)}f(x))), \quad i=1,\cdots,p$$

对任意的函数 $u=f(x)$成立.

由定义可知

$$D_iP = \frac{\partial P}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J u^\alpha_{Ji}\frac{\partial P}{\partial u^\alpha_J},$$

其中 $J=(j_1,\cdots,j_k)$，$0\leqslant k\leqslant n$，$1\leqslant j_k\leqslant p$，

$$u^\alpha_{Ji} = \frac{\partial u^\alpha_J}{\partial x^i} = \frac{\partial^{k+1}u^\alpha}{\partial x^i\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_k}}, \quad i=1,\cdots,p.$$

例 3.3.11 设 $X=\{(x,y)\}$，$U=\{(u)\}$，$P=P(x,y,u,u_x,u_y,\cdots)$，则

$$D_xP = \frac{\partial P}{\partial x} + u_x\frac{\partial P}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial P}{\partial u_x} + u_{xy}\frac{\partial P}{\partial u_y} + u_{xxx}\frac{\partial P}{\partial u_{xx}} + \cdots,$$

$$D_xP = \frac{\partial P}{\partial y} + u_y\frac{\partial P}{\partial u} + u_{xy}\frac{\partial P}{\partial u_x} + u_{yy}\frac{\partial P}{\partial u_y} + u_{xxy}\frac{\partial P}{\partial u_{xx}} + \cdots.$$

特别，取 $P=xuu_x^2$，则

$$D_xP = uu_x^2 + xu_x^3 + 2xuu_xu_{xx},$$

$$D_yP = xu_yu_x^2 + 2xuu_xu_{xy}.$$

进一步可定义高阶全导数，设 $J=(j_1,\cdots,j_k)1,\leqslant j_k\leqslant P$，则定义 D_J 为

$$D_J = D_{j_1}\cdots D_{j_k}.$$

不难看出，全导数可以交换. 例如，对上述 $P = xuu_x$，

$$D_xD_yP = D_yD_xP = D_y(uu_x^2 + xu_x^3 + 2xuu_xu_{xx})$$
$$= u_x^2u_y + 2uu_xu_{xy} + 3xu_x^2u_{xy} + 2xu_xu_yu_{xx}$$
$$+ 2xuu_{xy}u_{xx} + 2xuu_xu_{xxy}.$$

3. 延拓向量场的一般公式

定理 3.3.3 设

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{p}\xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{p}\phi_\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

是定义于 $X\times U$ 的开集 M 上的向量场，则它的第 n 阶延拓是定义于 $M^{(n)}$ 的向量场

$$pr^{(n)}\underline{v} = \underline{v} + \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{J}\phi_\alpha^J(x,u^{(n)})\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \qquad (3.3.8)$$

其中

$$\phi_\alpha^J(x,u^{(n)}) = D_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_{Ji}^\alpha, \quad (3.3.9)$$

$J=(j_1,\cdots,j_l),1\leqslant j_k\leqslant P,1\leqslant k\leqslant n.$

证明 对 n 作归纳法.

设 $n=1$，$g_\varepsilon=\exp\varepsilon\,\underline{v}$ 是对应于 $\underline{v}$ 的单参数群，且

$$(\widetilde{x},\widetilde{u}) = g_\varepsilon(x,u) = (\Psi_\varepsilon(x,u),\Phi_\varepsilon(x,u)).$$

又设 $(x,u^{(1)})\in M^{(1)}$，$u=f(x)$ 满足

$$u^{(1)} = pr^{(1)}f(x),$$

即

$$u^\alpha = f^\alpha(x), u_i^\alpha = \frac{\partial f^\alpha(x)}{\partial x^i}, \quad \alpha = 1,\cdots,q;i = 1,\cdots,p$$

当 ε 充分小时，$f\to\widetilde{f}$ 定义，即有

$$\widetilde{u} = \widetilde{f}_\varepsilon(\widetilde{x}) = (g_\varepsilon\circ f)(\widetilde{x}) = \Phi_\varepsilon(x,f) = \Phi_\varepsilon\circ(1\times f)(x),$$

式中 1 且表示恒同，又由

$$\tilde{x} = \Psi_\varepsilon(x, f) = \Psi_\varepsilon \circ (1 \times f)(x),$$
$$x = (\Psi_\varepsilon \circ (1 \times f))^{-1}(\tilde{x}),$$

就得到

$$\tilde{u} = \tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = (\Phi_\varepsilon \circ (1 \times f)) \circ (\Psi_\varepsilon \circ (1 \times f))^{-1}(\tilde{x}). \tag{3.3.10}$$

为确定向量场的一阶延拓，需考察$\left(\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\right)$的变换. 这是因为，在 $pr^{(n)} \underline{v}$ 中 $\dfrac{\partial}{\partial u_i^\alpha}$ 的系数就是 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\dfrac{\partial \tilde{f}^\alpha}{\partial \tilde{x}^i}\Big|_{\varepsilon=0}$，而 $\left(\dfrac{\partial \tilde{f}^\alpha}{\partial \tilde{x}^i}\right)$就是函数 $\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x})$的 Jacobi，即 $J\tilde{f}_\varepsilon$. 因此，进一步只须计算$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}J_\varepsilon(\tilde{x})\Big|_{\varepsilon=0}$. 由(3.3.10)，

$$J\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = (J(\Phi_\varepsilon \circ (1 \times f)(x)))(J\Psi_\varepsilon \circ (1 \times f)(x))^{-1}.$$

并且，当 $\varepsilon = 0$ 时

$$\Psi_0(x, f(x)) = x, \quad \Phi_0(x, f(x)) = f(x),$$
$$J(\Psi_0(1 \times f))(x) = I, \quad J(\Phi_0(1 \times f))(x) = Jf(x),$$

其中 I 为单位矩阵. 于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}J\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x})\Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}(J\Phi_\varepsilon \circ (1 \times f))(x)\Big|_{\varepsilon=0} \\ &\quad - Jf(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}J(\Psi_\varepsilon \circ (1 \times f))(x)\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= J(\phi \circ (1 \times f))(x) - Jf(x)J(\xi \circ (1 \times f))(x),\end{aligned}$$

其中 $\xi = (\xi^1, \cdots, \xi^p)^{\mathrm{T}}$，$\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_q)^{\mathrm{T}}$，而 $pr^{(1)}\underline{v}$中$\dfrac{\partial}{\partial u_k^\alpha}$的系数就是上矩阵中 α 行 k 列的元素，即

$$\phi_\alpha^k(x, pr^{(1)}f(x)) = \frac{\partial}{\partial x^k}(\phi_\alpha(x, f(x))) - \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k}(\xi^i(x, f(x))). \tag{3.3.11}$$

用全导数表出则有

$$\phi_\alpha^k(x,u^{(1)}) = D_k(\phi_\alpha(x,u)) - \sum_{i=1}^{p} u_i^\alpha D_k(\xi^i(x,u)),$$

(3.3.12)

即

$$\phi_\alpha^k(x,u^{(1)}) = D_k\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_{ik}^\alpha. \quad (3.3.13)$$

这就证明了定理当 $n=1$ 时成立.

现在假设定理对 $n-1$ 时成立,下面证明定理对 n 时也成立.为此,只需注意 $M^{(n)}$ 可看成 $M^{(n-1)}$ 的一个阶延拓空间 $(M^{(n-1)})^{(1)}$ 的子空间.这是因为,任一个 n 阶导数 u_J^α 都可以看作是一个 $n-1$ 导数的一阶导数,(可以有不同途径).因此,$pr^{(n)}\underline{v}$(在 $M^{(n)}$ 上)可以由 $pr^{(n-1)}\underline{v}$ 的一个阶延拓向量(在 $(M^{(n-1)})^{(1)}$ 上)限制在 $M^{(n)}$ 上得到.由归纳法假设,$pr^{(n)}\underline{v}$ 中的系数

$$\phi_\alpha^J(x,u^{(n-1)}) = D_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_{Ji}^\alpha,$$

其中 $J=(j_1,\cdots,j_k)$, $1\leqslant k\leqslant n-1$,于是 $pr^{(n)}\underline{v}$ 作为 $pr^{(n-1)}\underline{v}$ 的一阶延拓,由(3.3.11),其系数

$$\begin{aligned}\phi_\alpha^{J,l} &= D_l\left(D_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_i^\alpha + \sum\xi^i u_{Ji}^\alpha\right)\right) - \sum_{i=1}^{p} u_{Ji}^\alpha D_l\xi^i \\ &= D_l D_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi u_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_{Jil}^\alpha.\end{aligned}$$

定理证毕.

由定理的证明也可知,求延拓向量场可逐阶进行.

例 3.3.11 设 $X\times U=R\times R$,向量场

$$\underline{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u},$$

则 $\xi=-u$, $\phi=x$,则

$$pr^{(1)}\underline{v} = \underline{v} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x},$$

其中

$$\phi^x = D(\phi - \zeta u_x) + \zeta u_{xx} = D(x + uu_x) - uu_{xx} = 1 + u_x^2,$$

即有

$$pr^{(1)}\underline{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x},$$

而

$$pr^{(2)}\underline{v} = pr^{(1)}\underline{v} + \phi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}},$$

其中

$$\begin{aligned}\phi^{xx} &= D^2(\phi - \zeta u_x) + \zeta u_{xxx} \\ &= D\phi^x - (D\zeta)u_{xx} = 3u_x u_{xx},\end{aligned}$$

所以

$$pr^{(2)}\underline{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x} + 3u_x u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

应用到 $X \times U$ 上的方程 $u_{xx}=0$. 由于当 $u_{xx}=0$ 时,

$$pr^{(2)}\underline{v}(u_{xx}) = 3u_x u_{xx} = 0,$$

所以 $SO(2)$是方程 $u_{xx}=0$ 的不变群. 从几何上看,方程的解 $u = ax + b$ 为直线,经任意旋转仍为直线,仍表示方程的解.

又考虑 $X \times U^{(2)}$上的函数

$$K(x, u^{(2)}) = u_{xx}(1 + u_x^2)^{-3/2}.$$

由于

$$pr^{(2)}\underline{v}K = -\frac{3}{2}\cdot 2u_x u_{xx}(1 + u_x^2)^{-3/2} + 3u_x u_{xx}(1 + u_x^2)^{-3/2} = 0,$$

所以 K 是 $pr^{(2)}SO(2)$的不变量. 从几何上看这是显然的,因为 $K(x, f(x))$可看作是曲线 $u = f(x)$的曲率.

例 3.3.12 设 $X = \{(x, t)\}$, $U = \{(u)\}$.

$$\underline{v} = \xi(x, t, u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, u)\frac{\partial}{\partial u},$$

则

$$pr^{(1)}\underline{v} = \underline{v} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t\frac{\partial}{\partial u_t},$$

其中

$$\phi^x = D_x(\phi - \xi u_x - \tau u^t) + \xi u_{xx} + \tau u_{xt}$$
$$= \phi_x + (\phi_u - \xi_x)u_x - \xi_u u_x^2 - \tau_x u_t - \tau_u u_x,$$
$$\phi^t = D_t(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xt} + \tau u_{tt}$$
$$= \phi_t + (\phi_u - \tau_t)u_t - \tau_u u_t^2 - \xi_t u_x - \zeta_u u_x u_t,$$

而

$$pr^{(2)}\underline{v} = pr^{(1)}\underline{v} + \phi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt} + \phi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}.$$

其中

$$\phi^{xx} = D_x^2(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt},$$
$$\phi^{xt} = D_t D_x(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxt} + \tau u_{xtt},$$
$$\phi^{tt} = D_t^2(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xtt} + \tau u_{ttt}.$$

下面将给出延拓向量场一般公式的一个等价的在计算上有用的另一个形式.设

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{p}\xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{p}\phi_\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

令

$$Q_\alpha = \phi_\alpha(x,u) - \sum_{i=1}^{p}\xi^i(x,u)u_i^\alpha, \quad \alpha = 1,\cdots,q,$$

$Q=(Q_1,\cdots,Q_q)$称为向量场的特征.这样,延拓公式(3.3.7)中的

$$\phi_\alpha^J = D_J Q_\alpha + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_{Jj}^\alpha.$$

于是

$$pr^{(n)}\underline{v} = \sum_{i=1}^{p}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{p}\phi_\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_J D_J Q_\alpha\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_J \xi^i u_{Ji}^\alpha\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha},$$

即有

$$pr^{(n)}\underline{v} = \sum_{\alpha=1}^{p}Q_\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_J D_J Q_\alpha\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} + \sum_{i=1}^{p}\xi^i D_i. \tag{3.3.14}$$

进一步可将 D_J 扩充到 J 的重数为零的情况，这时规定 $D_J = I$（恒同），则(3.3.13)可改写为

$$pr^{(n)}\underline{v} = \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J} D_J Q_\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} + \sum_{i=1}^{q} \xi^i D_i. \qquad (3.3.15)$$

令

$$\underline{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^{q} Q_\alpha(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

则由(3.3.15)，

$$pr^{(n)}\underline{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J} Q_J Q_\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}. \qquad (3.3.16)$$

于是(3.3.15)又可改写为

$$pr^{(n)}\underline{v} = pr^{(n)}\underline{v}_Q + \sum_{i=1}^{p} \xi^i D_i. \qquad (3.3.17)$$

须特别注意的是，(3.3.15)和(3.3.16)中的 J 包括重数为零的情况.

最后还要指出延拓向量场的一个重要性质：向量场的延拓保持向量场的李代数性质，即若$\underline{v}$和$\underline{\omega}$是 $X \times U$ 的开集 M 的向量场，则有

$$pr^{(n)}(\lambda\underline{v} + \mu\underline{\omega}) = \lambda pr^{(n)}\underline{v} + \mu pr^{(n)}\underline{\omega},$$

$$pr(n)[\underline{v}, \underline{\omega}] = [pr^{(n)}\underline{v}, pr^{(n)}\underline{\omega}],$$

其中 λ 和 μ 是任意实数，并由此即可得到下列结论.

定理 3.3.4 设 $\Delta = 0$ 是 $X \times U$ 的开集 M 上具有最大秩的 n 阶微分方程组，则使 $pr^{(n)}\underline{v}(\Delta)|_{\Delta=0} = 0$ 的所有的向量场构成一李代数. 并且，若李代数是有限维的，则方程组的不变群构成作用于 M 上的一个局部李群.

§4 不变群的生成元

为了寻找微分方程的不变群的不变量，通常的步骤是先求不变群的生成元，即向量场，前一节的定理 3.3.2 为寻找这些生成元

提供了原则，下面将通过一些例子作具体的说明.

例 3.4.1　热传导方程

$$u_t = u_{xx}, \tag{3.4.1}$$

这时 $X=\{(x,t)\}, U=\{u\}$，而

$$\Delta(x,t,u^{(2)}) \equiv u_t - u_{xx}$$

定义于 $X\times U^{(2)}$ 中，设方程的不变群的生成元

$$\underline{v} = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

$$pr^{(2)}\underline{v} = \underline{v} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t\frac{\partial}{\partial u^t} + \phi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

并由此可知

$$pr^{(2)}\underline{v}(\Delta)\mid_{\Delta=0} = 0$$

必须且只须

$$(\phi^t - \phi^{xx})\mid_{\Delta=0} = 0. \tag{3.4.2}$$

由向量场的延拓公式(3.3.7)，

$$\begin{aligned}
\phi^t &= D_t(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xt} + \tau u_{tt}\\
&= \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2,\\
\phi^{xx} &= D_x^2(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt}\\
&= D_x^2\phi - u_x D_x^2\xi - u_t D_x^2\tau - 2u_{xx}D_x\xi - 2u_{xt}D_x\tau\\
&= \phi_{xx} + (2\phi_{ux} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\varphi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_x u_t\\
&\quad - \xi_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2 u_t + (\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx}\\
&\quad - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_t u_x u_{xt},
\end{aligned}$$

将以上两个等式代入(3.4.2)的左端，并将 u_t 代以 u_{xx}，则左端就可以表示为 $u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \cdots$的多项式. 再令多项式的各项系数为零，就得到 ξ, τ 和 ϕ 中应满足的条件，列表如下

$u_x u_{xxx}$	$2\tau_u = 0$	(a)
u_{xxx}	$2\tau_x = 0$	(b)
$u_x^2 u_{xx}$	$\tau_{uu} = 0$	(c)
$u_x u_{xx}$	$2(\xi_u - \tau_{xu}) = 0$	(d)

u_{xx}	$\tau_{xx}-\tau_t+2\xi_x=0$	(e)
u_x^3	$\xi_{uu}=0$	(f)
u_x^2	$2\xi_{xu}-\phi_{uu}=0$	(g)
u_x	$\xi_{xx}-\xi_t-2\phi_{xu}=0$	(h)
1	$\phi_t-\phi_{xx}=0$	(i)

由(a)和(b),τ 仅为 t 的函数,即 $\tau=\tau(t)$.这时,(c)自然成立,且(d)和(e)归结为

$$\xi_u=0,\quad \xi_x=\frac{1}{2}\tau'(t),$$

从而解得

$$\xi=\frac{1}{2}\tau'(t)x+\sigma(t),$$

其中 $\sigma(t)$是待定函数.由此可知(f)自然成立,以及(g)归结为$\phi_{uu}=0$ 并从而解得

$$\phi=\beta(x,t)u+\alpha(x,t).$$

进一步还需由条件(h)和(i)确定 $\tau(t),\sigma(t),\alpha(x,t)$和 $\beta(x,t)$.将已解得的 τ,ξ 和ϕ代入(h),即有

$$\beta_x=-\frac{1}{2}\xi_t=-\frac{1}{4}\tau''(t)x-\frac{1}{2}\sigma'(t),$$

并解得

$$\beta=-\frac{1}{8}\tau''(t)x^2-\frac{1}{2}\sigma'(t)x+\rho(t),$$

其中 $\rho(t)$为待定函数,再由(i),$\alpha(x,t)$和 $\beta(x,t)$应满足方程

$$\alpha_t=\alpha_{xx},\beta_t=\beta_{xx},$$

由 $\beta_t=\beta_{xx}$,

$$-\frac{1}{8}\tau'''(t)x^2-\frac{1}{2}\sigma''(t)x+\rho'(t)=-\frac{1}{4}\tau''(t),$$

并从而得到

$$\tau'''(t)=0,\sigma''(t)=0,\rho'(t)=-\frac{1}{4}\tau''(t).$$

因此可解得

$\tau(t) = c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2$, $\sigma(t) = c_1 + 2C_5 t$, $\rho(t) = c_3 - 2c_6 t$.

并进一步有

$$\xi = c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 xt,$$

$$\tau = c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2,$$

$$\phi = (c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2)u + \alpha(x,t),$$

其中 c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 和 c_6 为任意常数，$\alpha(x,t)$为满足条件 $\alpha_t = \alpha_{xx}$的任意函数.

可见，方程的不变群的全体生成元构成一个无穷维李代数，它包含一个 6 维的子代数，并有下列一组基：

$$\underline{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \underline{v}_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \underline{v}_3 = u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$\underline{v}_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}, \quad \underline{v}_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} + xu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$\underline{v}_6 = 4xt\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)u\frac{\partial}{\partial u},$$

以及一个无穷维的子代数

$$\underline{v}_\alpha = \alpha(x,t)\frac{\partial}{\partial u}$$

$(\alpha_t = \alpha_{xx})$. 于是，不变群的全体生成元就可以表示为

$$\underline{v} = c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + c_3\underline{v}_3 + c_4\underline{v}_4 + c_5\underline{v}_3 + c_6\underline{v}_6 + \underline{v}_\alpha.$$

由定理 2.10.1，对 $X \times U$ 上的给定向量场 $\underline{v}$，求与之相应的单参数变换群

$$g:(x,t,u) \to (\bar{x},\bar{t},\bar{u})$$

只需解微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}(\bar{x},\bar{t},\bar{u}) = \underline{v}(\bar{x},\bar{t},\bar{u}),$$

$$(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{u})\big|_{\epsilon=0} = (x,t,u).$$

由此不难解得与上列向量场相应的单参数群，

$$g_1:(x,t,u) \to (x+\varepsilon,t,u),$$

$$g_2:(x,t,u) \to (x,t+\varepsilon,u),$$

$$g_3:(x,t,u)\to(x,t,e^{\varepsilon}u),$$
$$g_4:(x,t,u)\to(e^{\varepsilon}x,e^{2\varepsilon}t,u),$$
$$g_5:(x,t,u)\to(x+2\varepsilon t,t,ue^{-\varepsilon x-\varepsilon^2 t}),$$
$$g_6:(x,t,u)\to\left(\frac{x}{1-4\varepsilon t},\frac{t}{1-4\varepsilon t},u\sqrt{1-4\varepsilon t}\exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right\}\right)$$

和

$$g_\alpha:(x,t,u)\to(x,t,u+\varepsilon\alpha(x,t)).$$

进一步,根据上列单参数不变群可知,若 $u=f(x,t)$是热传导方程(3.4.1)的解,则下列 $u^{(1)},u^{(2)},\cdots,u^{(6)}$和 $u^{(\alpha)}$也是方程的解

$$u^{(1)}=f(x-\varepsilon,t),$$
$$u^{(2)}=f(x,t-\varepsilon),$$
$$u^{(3)}=e^{\varepsilon}f(x,t),$$
$$u^{(4)}=f(e^{-\varepsilon}x,e^{-2\varepsilon t}),$$
$$u^{(5)}=e^{-\varepsilon x+\varepsilon^2 t}f(x-2\varepsilon t,t),$$
$$u^{(6)}=\frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon t}}\exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right\}f\left(\frac{x}{1+4\varepsilon t},\frac{t}{1+4\varepsilon t}\right),$$
$$u^{(\alpha)}=f(x,t)+\varepsilon\alpha(x,t),$$

其中 ε 为任意常数,$\alpha(x,t)$是方程的另一个任意解.

利用单参数不变群,由方程的一个特解可以生成方程的依赖于一个单参数的解. 例如,由热传导方程的一个显然解 $u=c$(常数)和 g_6,则可生成解

$$u=\frac{c}{\sqrt{1+4\varepsilon t}}\exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right\}.$$

连续利用方程的不变群 $g_\alpha,g_6,g_5,\cdots,g_1$,则可由方程的一个已知解 $u=f(x,t)$生成解

$$u=\frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon_6 t}}\exp\left\{\varepsilon_3-\frac{\varepsilon_5 x+\varepsilon_6 x^2-\varepsilon_5^2 t}{1+4\varepsilon_6 t}\right\}$$
$$\times f\left(\frac{e^{-\varepsilon_4}(x-2\varepsilon_5 t)}{1+4\varepsilon_6 t}-\varepsilon_1,\frac{e^{-2\varepsilon_4}t}{1+4\varepsilon_6 t}-\varepsilon_2\right)+\varepsilon_7\alpha(x,t),$$

其中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_7$ 为任意常数,$\alpha(x,t)$是方程(3.4.1)的任一解.

例 3.4.2 Burger 方程

$$u_t = u_{xx} + u_x^2, \tag{3.4.3}$$

这时,

$$\Delta(x,t,u^{(2)}) = u_t - u_{xx} - u_x^2.$$

设不变群的生成元为

$$\underline{v} = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

则 $pr^{(2)}\underline{v}(\Delta)|_{\Delta=0}=0$ 必须且只须

$$(\phi^t - \phi^{xx} - 2u_x\phi^x)|_{\Delta=0} = 0, \tag{3.4.4}$$

而

$$\begin{aligned}
&\phi^t - \phi^{xx} - 2u_x\phi^x \\
&= \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 \\
&\quad - (\phi_{xx} + 2(\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 \\
&\quad - 2\tau_{xu}u_x u_t - \xi_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2 u_t + (\phi_u - 2\xi_u)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} \\
&\quad - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}) - 2u_x(\phi_x + (\phi_u - \xi_u)u_x \\
&\quad - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t).
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

注意到(3.4.5)右端 $u_x u_{xt}$, u_{xt} 和 $u_x u_{xx}$ 的系数应数零,即有

$$\tau_u = 0, \quad \tau_x = 0, \quad \xi_u = 0.$$

因此,τ 与 x 和 u 无关,即 $\tau = \tau(t)$,而 ξ 与 u 无关,即 $\xi = \xi(x,t)$,且(3.4.5)右端化为

$$\begin{aligned}
&\phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau')(u_{xx} + u_x^2) - \phi_{xx} - (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x \\
&\quad - \phi_{uu}u_x^2 - (\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2u_x\phi_x - 2(\phi_u - \xi_x)u_x^2,
\end{aligned}$$

并由它的 u_{xx}, u_x^2, u_x 和 1 的系数为零得到

$$\tau'(t) - 2\xi_x = 0, \tag{3.4.6}$$

$$\phi_{uu} + \phi_u + \tau'(t) - 2\xi_x = 0, \tag{3.4.7}$$

$$\zeta_t + 2\phi_{xu} - \xi_{xx} + 2\phi_x = 0, \tag{3.4.8}$$

$$\phi_t - \phi_{xx} = 0. \tag{3.4.9}$$

由(3.4.6)和(3.4.7),

$$\xi = \frac{1}{2}\tau'(t)x + \sigma(t), \quad \varphi = \alpha(x,t)\mathrm{e}^{-u} + \beta(x,t).$$

这时,(3.4.8)化为

$$\zeta_t = -2\beta_x,$$

即

$$\beta_x = -\frac{1}{4}\tau''(t)x - \frac{1}{2}\sigma'(t),$$

并解得

$$\beta = -\frac{1}{8}\tau''(t)x^2 - \frac{1}{2}\sigma'(t)x + \rho(t). \qquad (3.4.10)$$

而由(3.4.9)则得到

$$\alpha_t = \alpha_{xx}, \beta_t = \beta_{xx}.$$

再将(3.4.10)代入 $\beta_t = \beta_{xx}$,则有

$$\tau'''(t) = 0, \sigma''(t) = 0, \rho'(t) = -\frac{1}{4}\tau''.$$

于是

$$\tau = c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2, \quad \sigma = c_1 + 2c_5 t, \quad \rho = c_3 - 2c_6 t$$

以及

$$\xi = c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 xt,$$

$$\tau = c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2,$$

$$\phi = \alpha(x,t)e^{-u} + c_3 - c_5 x + 2c_6 t - c_6 x^2,$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_6$ 为任意常数,$\alpha(x,t)$满足 $\alpha_t = \alpha_{xx}$.进一步得到不变群的生成元

$$\underline{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \underline{v}_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \underline{v}_3 = \frac{\partial}{\partial u},$$

$$\underline{v}_4 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad \underline{v}_3 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial u},$$

$$\underline{v}_6 = 4xt\frac{\partial}{\partial x} - 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)\frac{\partial}{\partial u},$$

$$\underline{v}_\alpha = \alpha(x,t)\mathrm{e}^{-u}\frac{\partial}{\partial u}.$$

所得的结论与热传导方程的情况何其相似！事实上，映射

$$f:(x,t,u)\to(\bar{x},\bar{t},\bar{u})=(x,t,\ln u)$$

将热传导方程(3.4.1)化为 Burger 方程

$$\bar{u}_{\bar{t}}=\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}+\bar{u}_{\bar{x}}^2, \tag{3.4.11}$$

其切映射

$$f_*:\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial u}\right)\to\left(\frac{\partial}{\partial\bar{x}},\frac{\partial}{\partial\bar{t}},e^{-\bar{u}}\frac{\partial}{\partial\bar{u}}\right)$$

则将(3.4.1)的生成元变为 Burger 方程(3.4.11)的生成元. 例如

$$f_*\left(4xt\frac{\partial}{\partial x}+4t^2\frac{\partial}{\partial t}-(x^2+2t)u\frac{\partial}{\partial u}\right)$$

$$=4\bar{x}\bar{t}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}+4\bar{t}^2\frac{\partial}{\partial\bar{t}}-(\bar{x}^2+2\bar{t})\frac{\partial}{\partial\bar{u}}.$$

例 3.4.3　KdV 方程

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x, \tag{3.4.12}$$

这时

$$\Delta(x,t,u^{(3)})=u_t-u_{xxx}-6uu_x.$$

设不变群的生成元

$$\underline{v}=\xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x}+\tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t}+\phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

则 $pr^{(3)}\underline{v}(\Delta)|_{\Delta=0}=0$ 必须且只须

$$(\phi^t-\phi^{xxx}-6u\phi^x-6u_x\phi)|_{\Delta=0}=0, \tag{3.4.13}$$

其中

$$\phi^t=D_t\phi-u_xD_t\xi-u_tD_t\tau,$$

$$\phi^x=D_x\phi-u_xD_x\xi-u_tD_x\tau,$$

$$\phi^{xxx}=D_x^3(\phi-\xi u_x-\tau u_t)+\xi u_{xxxx}+\tau u_{xxxt}$$

$$=D_x^3\phi-u_xD_x^3\xi-u_tD_x^3\tau-3U_{xx}D_x^2\xi$$

$$-3u_{xt}D_x^2\tau-3u_{xxx}D_x\xi-3u_{xxt}D_x\tau,$$

由 $\phi^t-\phi^{xxx}-6u^x\phi^x-6u_x\phi$ 中 u_{xxt} 和 $u_{xx}^2(-3u_{xx}D_x^2\xi)$ 的系数为零，得

$$\tau_x=0,\quad\tau_u=0,\xi_u=0,$$

于是

$$\tau = \tau(t), \quad \xi = \xi(x,t),$$

且有

$$\begin{aligned}&\phi^t - \phi^{xxx} - 6u\,\phi^x - 6u_x\phi \\ =&D_t\phi - u_x\xi_t - u_t\tau' - D_x^3\phi + u_x\xi_{xxx} \\ &+ 3u_{xx}\xi_{xx} + 3u_{xxx}\xi_x - 6uD_x\phi + 6uu_x\xi_x - 6u_x\phi,\end{aligned} \quad (3.4.14)$$

将 $u_t = u_{xxx} + 6uu_x$ 代入，并注意到 $D_t\phi = \phi_x + \phi_u u_t$ 中出现的 $\phi_u u_{xxx}$ 与 $-D_x^3\phi$ 中出现的 $-\phi_u u_{xxx}$ 消去，则由 u_{xxx} 的系数为零得到

$$3\xi_x - \tau'(t) = 0,$$

因此

$$\xi = \frac{1}{3}\tau'(t) + \sigma(t).$$

再考虑到(3.4.14)中包含 u_{xx} 的项（仅在 $D_x^3\phi$ 之中），可得

$$\phi_{xx} = 0, \phi_{xu} = 0,$$

于是

$$\phi = \alpha(t)u + \beta(x,t).$$

这时，(3.3.14)的右端就化为

$$6(\xi_x - \alpha - \tau')uu_x - (\xi_t + 6\beta)u_x + (\alpha' + 6\beta_x)u + \beta_t - \beta_{xxx},$$

并由 uu_x, u_x, u 和 1 的系数为零得到

$$\xi_x - \alpha - \tau' = 0, \quad (3.4.15)$$

$$\xi_t + 6\beta = 0, \quad (3.4.16)$$

$$\alpha' + 6\beta_x = 0, \quad (3.4.17)$$

$$\beta_t - \beta_{xxx} = 0. \quad (3.4.18)$$

由(3.4.15)和(3.4.16)，

$$\alpha = \xi_x - \tau' = -\frac{2}{3}\tau', \quad (3.4.19)$$

$$\beta = -\frac{1}{6}\xi_t = -\frac{1}{18}\tau''x - \frac{1}{6}\sigma'. \quad (3.4.20)$$

再由(3.4.17)，

$$\alpha' = -6\beta_x = -\frac{1}{3}\tau''.$$

将此式与(3.4.19)比较即可知，

$$\tau'' = 0,$$

以及

$$\beta_x = 0, \quad \beta = -\frac{1}{6}\sigma'.$$

则进一步由(3.4.18)可得

$$\beta_t = 0.$$

总之，我们有

$$\tau'' = 0, \quad \alpha = \frac{2}{3}\tau', \quad \beta_x = 0 = \beta_t, \quad \sigma' = -6\beta.$$

并从而解得

$$\tau = c_2 + 3c_4 t, \quad \alpha = -2c_4, \beta = c_3, \quad \sigma = c_1 - 6c_3 t,$$

其中 c_1、c_2、c_3 和 c_4 是任意常数.所以

$$\xi = c_1 + c_4 x - 6c_3 t,$$

$$\tau = c_2 + 3c_4 t,$$

$$\phi = c_3 - 2c_4 u.$$

不变群的全体生成元 $\underline{v} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \phi\frac{\partial}{\partial u}$ 构成一个四维李代数，并有下列一组基：

$$\underline{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \underline{v}_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \underline{v}_3 = -6t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u},$$

$$\underline{v}_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u}.$$

与它们相应的单参数变换群：

$$g_1:(x,t,u) \to (x+\varepsilon, t, u),$$

$$g_2:(x,t,u) \to (x, t+\varepsilon, u),$$

$$g_3:(x,t,u) \to (x-6\varepsilon t, t, u+\varepsilon),$$

$$g_4:(x,t,u) \to (e^{\varepsilon}x, e^{3\varepsilon}t, e^{-2\varepsilon}u),$$

并由此可知，若 $u = f(x,t)$ 是 KdV 方程(3.4.12)的解，则以下的

$u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$和 $u^{(4)}$也是方程的解

$$u^{(1)} = f(x - \varepsilon, t),$$
$$u^{(2)} = f(x, t - \varepsilon),$$
$$u^{(3)} = f(x + 6\varepsilon t, t) + \varepsilon,$$
$$u^{(4)} = e^{-2\varepsilon} f(e^{-\varepsilon} x, e^{-3\varepsilon} t).$$

它们分别表示下列不变性:x 轴平移,t 轴平移,伽利略变换和标量变换.

§5 常微分方程的积分

李群理论最有意义的应用之一就是常微分方程的积分.李群的奠基人 S. Lie 的一个基本思想就是,一个常微分方程系统,如果知道了它的足够大的不变群,则可通过积分求出它的通解.具体说,如果知道了一个微分方程的一个单参数不变群,一阶的方程就可以通过积分求解,高阶的方程则可以降阶,以下将分别说明.

设给定一阶常微分方程

$$\frac{du}{dx} = F(x, u), \tag{3.5.1}$$

并知

$$\underline{v} = \xi(x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \phi(x, u)\frac{\partial}{\partial u}$$

是方程的一个单参数不变群 G 的生成元.设 $\underline{v}(x_0, u_0) \neq \underline{0}$,则在 (x_0, u_0)近旁可经坐标变换

$$y = \eta(x, u), \qquad w = \zeta(x, u), \tag{3.5.2}$$

使在(y, w)坐标系中

$$\underline{v} = \frac{\partial}{\partial w},$$

并由此得出

$$pr^{(1)}\underline{v} = \frac{\partial}{\partial w}.$$

因此,在新坐标系(y, w)中,(3.5.1)可化为等价的方程

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}=H(y),$$

从而可将方程积分

$$w=\int H(y)\mathrm{d}y+c.$$

再利用(3.5.2)就得到(3.5.1)的隐式解.

以上的论述从原则上解决了问题.但具体操作中却有困难.一是对给定的方程(3.5.1)如何求得它的单参数不变群或其生成元,另一个是如何求得坐标变换(3.5.2).

由本章§中的延拓理论,$\underline{v}=\xi(x,u)\frac{\partial}{\partial x}+\phi(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$是方程(3.5.1)的单参数不变群的生成元必须且只须

$$pr^{(1)}\underline{v}(\Delta)\mid_{\Delta=0}=0,\quad \Delta=u_x-F(x,u),\quad(3.5.3)$$

即

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)F-\frac{\partial\xi}{\partial u}F^2-\xi\frac{\partial F}{\partial x}-\phi\frac{\partial F}{\partial u}=0,$$

这是关于ξ和ϕ的偏微分方程,求解它并不比求解原方程容易.

至于第二个问题,由于在新坐标系(x,w)中$\underline{v}=\frac{\partial}{\partial w}$,由之立即可得到$\eta(x,u)$和$\zeta(x,u)$满足的条件

$$\underline{v}\eta=\xi\frac{\partial\eta}{\partial x}+\phi\frac{\partial\eta}{\partial u}=0,\qquad(3.5.4)$$

$$\underline{v}\zeta=\xi\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\phi\frac{\partial\zeta}{\partial u}=1.\qquad(3.5.5)$$

要求解这样的一阶线性的偏微分方程同样也是困难的.不过,(3.5.4)说明$\eta(x,u)$是方程的不变群的不变量.所以,对问题的一般性的回答,上述办法对求解并无实质性的帮助.但对于一些易于观察出其不变性的方程,利用上述思路对求解却是有帮助的.

例3.5.1 齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=F\left(\frac{u}{x}\right)\qquad(3.5.6)$$

有一个明显的不变群

$$g_\varepsilon: \quad (x,u) \to (e^\varepsilon x, e^\varepsilon u),$$

其生成元为

$$\underline{v} = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}.$$

它有一个显然的不变量 $\eta = \frac{u}{x}$. 又由方程

$$x\frac{\partial \zeta}{\partial x} + u\frac{\partial \zeta}{\partial u} = 1$$

可解得 $\zeta = \ln u$(或 $\ln x$ 等). 于是作坐标变换

$$y = \frac{u}{x}, \quad w = \ln u,$$

则方程(3.5.6)就化为

$$\frac{dw}{dy} = \frac{F(y)}{y(F(y) - y)},$$

从而解得

$$w = \int \frac{F(y)}{y(F(y) - y)} dy + c. \qquad (3.5.7)$$

例如,对齐次方程

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{u}{x}\right)^2 + 2\frac{u}{x},$$

由 $F(y) = y^2 + 2y$ 和(3.5.7)即可解得

$$w = \ln\frac{y^2}{y+1} + c_1.$$

再利用 $y = \frac{u}{x}$ 和 $w = \ln u$ 即可得到方程的通解

$$u = \frac{x^2}{c - x}.$$

例 3.5.2 方程

$$\frac{du}{dx} = \frac{u + xH(r)}{x - uH(r)}, \qquad (3.5.8)$$

其中 $r = \sqrt{x + u^2}$, H 为任意函数,考虑作用于 $X = \{(x,u)\}$ 上的旋转群 $SO(2)$,其生成元为

$$\underline{v} = u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u}.$$

由于

$$pr^{(1)}\underline{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1+u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x},$$

$$pr^{(1)}\underline{v}(\Delta)\mid_{\Delta=0} = 0, \quad \Delta = u_x - \frac{u + xH(r)}{x - uH(r)},$$

可知 $SO(2)$是方程(3.5.8)的不变群. 由于 $r=\sqrt{x^2+u^2}$是它的一个显然的不变量,以及 $\underline{v}(\arctan\frac{u}{x})=1$,可作坐标交换

$$r = \sqrt{x^2+u^2}, \quad \theta = \arctan\frac{u}{x},$$

即

$$x = r\cos\theta, \quad u = r\sin\theta.$$

这样,方程(3.5.8)就化为

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{H(r)}{r},$$

从而解得

$$\theta = \int\frac{H(r)}{r}dr + c. \tag{3.5.9}$$

特别,当 $H=1$ 时,即方程

$$\frac{du}{dx} = \frac{u+x}{x-u},$$

由(3.5.9)即可得到解

$$\theta = \ln r + c.$$

一阶常微分方程又常表示为一个全微分方程

$$P(x,u)dx + Q(x,u)du = 0. \tag{3.5.10}$$

此方程称为**恰当的**,如果

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

对恰当的全微分方程,可按

$$\frac{\partial T}{\partial u} = Q, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = P,$$

找到它的通积分

$$T(x,u)=c.$$

如果方程(3.5.10)不是恰当的,则可寻找积分因子 $R(x,u)$ 使 $RP\mathrm{d}x+RQ\mathrm{d}u$ 为恰当形式,从而可求得通积分.以下说明,如果知道方程的一个单参数不变群的生成元,则立即可求得积分因子 R.

定理 3.5.1 设方程(3.5.10)有以 $\underline{v}=\xi(x,u)\frac{\partial}{\partial x}+\phi(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$ 为生成元的单参数不变群,则

$$R(x,u)=\frac{1}{\xi(x,u)P(x,u)+\phi(x,u)Q(x,u)} \tag{3.5.11}$$

是方程(3.5.10)的积分因子.

证明 根据定理的假设,

$$pr^{(1)}\underline{v}(\Delta)\mid_{\Delta=0}=0,\quad \Delta=u_x-\frac{P}{Q},$$

即

$$\begin{aligned}&(\xi P_x+\phi P_u)Q-(\xi Q_x+\phi Q_u)P+\phi_x Q^2\\&-(\phi_u-\xi_x)PQ-\xi_u P^2=0.\end{aligned} \tag{3.5.12}$$

要证明 $R(x,u)$ 是积分因子,只需证明

$$\frac{\partial}{\partial u}(RP)=\frac{\partial}{\partial x}(RQ),$$

即

$$R_u P+RP_u=R_x Q+RQ_x. \tag{3.5.13}$$

将 $R(x,u)$ 的表示式(3.5.11)代入,(3.5.13)化为

$$\begin{aligned}&-(\xi_u P+\xi P_u+\phi_u Q+\phi Q_u)P+(\xi P+\phi Q)P_u\\&=-(\xi_x P+\xi P_x+\phi_x Q+\phi Q_x)Q+(\xi P+\phi Q)Q_x.\end{aligned}$$

不难看出,此式与(3.5.12)等价.定理证毕.

例 3.5.3 在上例中,(3.5.8)可写为

$$(u+xH(r))\mathrm{d}x+(uH(r)-x)\mathrm{d}u=0.$$

由定理 3.5.1,可求得积分因子

$$R=\frac{1}{-u(u+xH)+x(uH-x)}=-\frac{1}{x^2+u^2}.$$

特别,当 $H=1$ 时,方程可化为

$$-\frac{1}{x^2+u^2}((u+x)\mathrm{d}x+(u-x)\mathrm{d}u)=0,$$

即

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+u^2)-\arctan\frac{u}{x}\right)=0.$$

从而可得通积分

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+u^2)-\arctan\frac{u}{x}=c.$$

用积分因子法似乎更方便些.这时只要知道不变群的生成元,而不必知道群本身或群的不变量.不过,当 $\xi P+\phi Q=0$ 时,则无法求得积分因子.

现在考虑 $n(>1)$ 阶常数分方程

$$\Delta(x,u^{(n)})=\Delta(x,u,u_x,\cdots,u_n)=0, \qquad (3.5.14)$$

其中 $u_n=\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n}$.以下说明,如果知道方程(3.5.14)的一个单参数不变群 G,则可利用这个不变群将方程降阶.具体说,设 $\underline{v}$ 是G 的生成元,则在正常点近旁必可经坐标变换

$$y=\eta(x,u), \quad w=\zeta(x,u),$$

使在新坐标系(y,w)中

$$\underline{v}=\frac{\partial}{\partial w},$$

而$\frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}x^k}$为$y,w,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y},\cdots,\frac{\mathrm{d}^k w}{\mathrm{d}y^k}$的确定的函数,因此,方程(3.5.14)就化为

$$\bar{\Delta}(y,w^{(n)})=\bar{\Delta}(y,w,w_y,\cdots,w_n)=0. \qquad (3.5.15)$$

由于在(y,w)坐标系中

$$pr^{(n)}\underline{v}=\frac{\partial}{\partial w},$$

于是,由定理 3.1.9,必有与(3.5.15)等价的方程

$$\tilde{\Delta}(y, w_y, \cdots, w_n) = 0,$$

其左端不显含 w. 令 $z = w_y$,则此方程即降阶为 $n-1$ 阶方程

$$\tilde{\Delta}(y, z, z_y, \cdots, z_{n-1}) = 0.$$

由此方程的解 $z = h(y)$就得到(3.5.15)的解

$$w = \int h(y)\mathrm{d}y + c.$$

再利用坐标换公式就得到原方程的解.

例 3.5.4 二阶方程

$$\Delta(u, u_x, u_{xx}) = 0 \tag{3.5.16}$$

有一个显然的不变性,x 平移,其生成元

$$\underline{v} = \frac{\partial}{\partial x}.$$

由于 $\underline{v}u = 0$, $\underline{v}x = 1$,可作变换

$$y = u, \quad w = x,$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{w_y}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{w^{yy}}{w_y^3}.$$

方程(5.1.6)就化为

$$\Delta\left(y, \frac{1}{w_y}, -\frac{w_{yy}}{w_y^3}\right) = 0.$$

令 $w_y = z$,则此方程就化为一阶方程

$$\tilde{\Delta}(y, z, zy) = \Delta\left(z, \frac{1}{z}, -\frac{z_y}{z^3}\right) = 0.$$

例如,方程

$$u_{xx} - 2uu_x = 0,$$

利用上述变换可化为

$$z_y = (y^2 + c)^{-1},$$

再按 $w_y = z$ 可解得

$$u = \begin{cases} c'\tan(c'x + d), & \text{当 } c = c' > 0, \\ -(x + d)^{-1}, & \text{当 } c = 0, \\ c'\tanh(c'x + d), & \text{当 } c = -c' < 0. \end{cases}$$

例 3.5.5 二阶齐次线性方程

$$u_{xx} + p(x)u_x + q(x)u = 0 \tag{3.5.17}$$

有一个显然的不变群

$$G:\quad (x,u) \to (x, e^{\varepsilon}u),$$

其生成元为

$$\underline{v} = u\frac{\partial}{\partial u}.$$

由于 $\underline{v} = 0$, $\underline{v}\ln u = 1$, 则经变换 $w = \ln u$ 将方程(3.5.17)化为

$$w_{xx} + w_x^2 + p(x)w_x + q(x) = 0.$$

令 $z = w_x = (\ln u)_x$, 则方程就进一步化为 Riccati 方程

$$z_x = -z^2 - p(x)z - q(x).$$

对一阶常微分方程组

$$\frac{du^{\alpha}}{dx} = F_{\alpha}(x,u), \quad \alpha = 1,\cdots,q, \tag{3.5.18}$$

也可作类似的处理. 这时, $X \times U = \{(x, u^1, \cdots, u^q)\}$. 设 G 是方程的一个单参数不变群, 其生成元为 $\underline{v}$. 于是, 在 $\underline{v}$ 的正常点近旁可经坐标变换

$$y = \eta(x,u), w^{\alpha} = \zeta^{\alpha}(x,u), \quad \alpha = 1,\cdots,q,$$

使在新坐标系 (y, w^{α}) 中 $\underline{v} = \dfrac{\partial}{\partial w^q}$, (3.5.18)则化为等价的方程组

$$\frac{dw^{\alpha}}{dy} = H_{\alpha}(y, w^1, \cdots, w^{q-1}), \quad \alpha = 1,\cdots,q.$$

由于 $H_{\alpha}(\alpha = 1,\cdots,q)$ 中不显 w^q, 我们只需求解只含有 $q-1$ 个未知函数的方程组

$$\frac{dw^{\alpha}}{dy} = H_{\alpha}(y, w^1, \cdots, w^{q-1}), \quad \alpha = 1,\cdots,q-1.$$

只要求得这一方程组的解 $w^1(y), \cdots, w^{q-1}(y)$, 就可以直接积分求得 $w^q(y)$,

$$w^q(y) = \int H_q(y, w^1(y), \cdots, w^{q-1}(y))\mathrm{d}y + c.$$

不难看出，坐标变换中的 $\eta(x,u)$ 和 $\zeta^\alpha(x,u)$ 满足

$$\underline{v}(\eta) = 0, \quad \underline{v}(\zeta^q) = 1,$$

$$\underline{v}(\zeta^\lambda) = 0, \quad \lambda = 1, \cdots, q-1.$$

例 3.5.6 一阶线性常微分方程

$$\dot{x} = \alpha(t)x + \beta(t)y,$$

$$\dot{y} = \gamma(t)x + \delta(t)y,$$

有一个显然的不变群

$$G: \quad (t, x, y) \to (t, e^\varepsilon x, e^\varepsilon y),$$

其生成元为

$$\underline{v} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

由于 $\underline{v}\ln x = 1, \underline{v}\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \underline{v}t = 0$，经坐标换 $w = \ln x, z = \frac{y}{x}, t = t$. 则方程组就化为

$$w_t = \alpha(t) + \beta(t)z,$$

$$z_t = \gamma(t) + \delta(t)z - \alpha(t)z - \beta(t)z^2.$$

这样，问题为化为求解上列 Riccati 方程.

进一步要讨论的问题是，对给定的群 G，以它为不变群的微分方程的一般形式是什么？由延拓理论和本章 §1 的定理 3.1.9，n 阶微分方程 $\Delta(x, u^{(u)}) = 0$ 允许 G 为不变群必须且只须它有一个等价的方程 $\tilde{\Delta} = 0$，而 $\tilde{\Delta}$ 仅依赖于 $pr^{(n)}G$ 的不变量. 这些不变量不仅依赖于 x 和 u，而且依赖于 u 对 x 的各阶导数，我们称为 G 的微分不变量.

定义 3.5.1 设 G 是作用于 $M(\subset X \times U)$ 上的变换群

$$\eta: \quad M^{(n)} \to R$$

称为 G 的 n **阶微分不变量**，如果 η 是 $pr^{(n)}G$ 的不变量，即

$$\eta(pr^{(n)}g \cdot (x, u^{(n)})) = \eta(x, u^{(n)})$$

对 G 中任意使 $pr^{(n)}g \cdot (x, u)$ 定义的 g 成立.

以下仅讨论 $p=q=1$ 的情况.

例 3.5.7 作用于 $M=X\times U=R^2$ 上的旋转群 $SO(2)$ 有一个明显的不变量 $y=\sqrt{x+u^2}$,其一阶微分不变量则需加上 $\omega=\dfrac{xu_x-u}{uu_x+x}$,二阶微分不变量则又需加上 $k=u_{xx}(1+u_x^2)^{-\frac{2}{3}}$.

以上各阶微分不变量都有明确的几何意义. $\underline{r}(x,u(x))$ 表示 M 上的一条曲线,则 $y=|\underline{r}|$, $w=\tan(\underline{r},\underline{r}')$,而 k 则是曲线的曲率. 它们经任意的旋转不变是显然的. 由于 $pr^{(2)}G$ 作用的空间 $X\times M^{(2)}$ 是 4 维的,以上 y,w 和 k 构成 $pr^{(2)}G$ 的不变量完全组.

定理 3.5.2 设 G 是作用于 $M(\subset X\times U)$ 上的变换群,

$$y=\eta(x,u^{(n)}),\quad w=\zeta(x,u^{(n)})$$

是 G 的 n 阶微分不变量,则

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\Big/\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{D_x\zeta}{D_x\eta}$$

是 G 的 $n+1$ 阶微分不变量.

证明 先证明下列公式

$$pr^{(n+1)}\underline{v}(D_x\zeta)=D_x(pr^{(n)}\underline{v}(\zeta))-D_x\xi D_x\zeta,\qquad(3.5.19)$$

其中 $\zeta(x,n)$ 为任意函数, $\underline{v}=\xi\dfrac{\partial}{\partial x}+\phi\dfrac{\partial}{\partial u}$ 为任意向量场,由本章 §3 中的(3.3.14)和向量场的延拓公式,

$$pr^{(n+1)}\underline{v}=pr^{(n+1)}\underline{v_Q}+\xi D_x,$$

其中

$$\underline{v_Q}=\phi\frac{\partial}{\partial u},\quad pr^{(n+1)}\underline{v_Q}=\sum_{j=0}^{n}D_x^j\phi\frac{\partial}{\partial u_j}.$$

于是

$$pr^{(n+1)}\underline{v}(D_x\zeta)=pr^{(n+1)}\underline{v_Q}(D_x\zeta)+\xi D_x^2\zeta,\quad(3.5.20)$$

又由

$$pr^{(n)}\underline{v}(\zeta)=pr^{(n)}\underline{v_Q}(\zeta)+\xi D_x\zeta,$$

两端用 D_x 作用,

$$D_x(pr^{(n)}\underline{v}(\zeta)) = D_x(pr^{(n)}\underline{v}_Q(\zeta)) + D_x\xi D_x\zeta + \xi D_x^2\zeta, \tag{3.5.21}$$

而

$$D_x(pr^{(n)}\underline{v}_Q(\zeta)) = \sum_{j=0}^{n} D_x^{j+1}\phi\frac{\partial\zeta}{\partial u^j} + \sum_{j=0}^{n} D_x^j\phi D_x\frac{\partial\zeta}{\partial u^j},$$

注意到

$$D_x\frac{\partial\zeta}{\partial u^j} = \frac{\partial}{\partial u_j}D_x\zeta - \frac{\partial\zeta}{\partial u_{j-1}}, \quad 当\ j \geqslant 1,$$

$$D_x\frac{\partial\zeta}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}D_x\zeta,$$

以及由于 ζ 是 $(x, u^{(n)})$ 的函数，它与 u_{n+1} 无关，可知

$$\frac{\partial\zeta}{\partial u_n} = \frac{\partial}{\partial u_{n+1}}D_x\zeta,$$

于是

$$\begin{aligned}
&D_x(pr^{(n)}\underline{v}_Q(\zeta)) \\
&= \sum_{j=0}^{n} D_x^{j+1}\phi\frac{\partial\zeta}{\partial u^j} + \sum_{j=0}^{n} D_x^j\phi\frac{\partial\zeta}{\partial u^j}(D_x\zeta) - \sum_{j=0}^{n} D_x^j\phi\frac{\partial\zeta}{\partial u_{j-1}} \\
&= \sum_{j=0}^{n} D_x^j\phi\frac{\partial\zeta}{\partial u^j}(D_x\zeta) + D_x^{n+1}\phi\frac{\partial\zeta}{\partial u^j} = \sum_{j=0}^{n+1} D_x^j\phi\frac{\partial}{\partial u^j}(D\zeta),
\end{aligned}$$

这就得到

$$D_x(pr^{(n)}\underline{v}_Q(\zeta)) = pr^{(n+1)}\underline{v}_Q(D\zeta). \tag{3.5.22}$$

将此代入(3.5.20)再应用(3.5.21)即证得(3.5.19).

下面利用公式(3.5.19)证明定理. 设 $\underline{v}$ 是 G 的任一生成元，由于对任意的向量场 $\underline{v}$,

$$\underline{v}\left(\frac{D_x\zeta}{D_x\eta}\right) = \frac{\underline{v}D_x\zeta}{D_x\eta} - \frac{(\underline{v}D_x\eta)D_x\zeta}{(D_x\eta)^2},$$

可知

$$pr^{(n+1)}\underline{v}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right) = \frac{1}{(D_x\eta)^2}\big((D_x\eta)pr^{(n+1)}\underline{v}(D_x\zeta) - (D_x\zeta)pr^{(n+1)}\underline{v}(D_x\eta)\big).$$

由公式(3.5.19),

$$pr^{(n+1)}\underline{v}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{1}{(D_x\eta)^2}((D_x\eta)D_x(pr^n\underline{v}(\zeta))$$
$$-(D_x\zeta)D_x(pr^n\underline{v}(\eta))),$$

根据定理的假设,y 和 w 是 G 的 n 阶微分不变量,即有 $pr^{(n)}\underline{v}(\eta)=pr^{(n)}\underline{v}(\zeta)=0$,所以

$$pr^{(n+1)}\underline{v}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)=0,$$

即 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}$ 为 $n+1$ 阶微分不变量.

特别,若 G 是单参数变换群,则可由它的一个零阶不变量和一个阶不变量生成 G 的不变量完全组.

定理 3.5.3 设 G 是作用于 $M(\subset X\times U=R^2)$ 上的单参数变换群,$y=\eta(x,u)$ 和 $w=\zeta(x,u,u_x)$ 是 $pr^{(1)}G$ 的函数独立的不变量完全组,则

$$y,w,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}w}{\mathrm{d}y^{n-1}}$$

是 $pr^nG(n\geqslant1)$ 的函数独立的不变量完全组.

证明 由于 $X\times M^{(n)}$ 是 $n+1$ 维的,只须证明 $y,w,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}w}{\mathrm{d}y^{n-1}}$ 是函数独立的,而这是显然的,因为 $\frac{\mathrm{d}^kw}{\mathrm{d}y^k}$ 显含 $u_{k+1}=\frac{\mathrm{d}^{k+1}u}{\mathrm{d}x^{n+1}}$,它与前面的函数无关.

例 3.5.7 已知 $SO(2)$ 的一阶微分不变量

$$y=\sqrt{x^2+u^2},\quad w=\frac{xu_x-u}{uu_x+x},$$

由定理 3.5.2,我们可得到它的二阶微分不变量

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}=\frac{\sqrt{x^2+u^2}}{(uu_x+x)}((x^2+u^2)u_{xx}-(1+u_x^2)(xu_x-u)),$$

即 y,w 和 w_y 构成 $pr^{(2)}G$ 的不变量完全组,而

$$k=\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}}=\frac{w_y}{(1+w^2)^{3/2}}+\frac{w}{y(1+w^2)^{1/2}}.$$

由上面的两个定理还可得到下列结论.

定理 3.5.4 设 G 是作用于 $M(\subset X\times U)$ 上的局部变换群，$\eta^1(x,u^{(n)}),\cdots,\eta^k(x,u^{(n)})$ 是 $pr^{(n)}G$ 的函数独立的不变量完全组，则 n 阶微分方程 $\Delta(x,u(n))=0$ 允许 G 为不变群必须且只须它有一个等价的方程

$$\tilde{\Delta}(\eta^1(x,u^{(n)}),\cdots,\eta^k(x,u^{(n)}))=0,$$

特别，若 G 是单参数变换群，则以 G 为不变群的 n 阶微分方程必等价于一个 $n-1$ 阶微分方程

$$\tilde{\Delta}\left(y,w,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}w}{\mathrm{d}y^{n-1}}\right)=0,$$

其中 $y=\eta(x,u),w=\zeta(x,u,u_x)$ 为 $pr^{(1)}G$ 的不变量完全组.

例 3.5.8 作用于 $X\times U=\{(x,u)\}$ 上的旋转群 $SO(2)$ 有下列零阶、一阶和二阶不变量

$$y=\sqrt{x^2+u^2},\quad w=\frac{xu_x-u}{uu_x+x},\quad k=\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2))^{3/2}},$$

则以 $SO(2)$ 不变群的全体一阶微分方程为

$$f(y,w)=0$$

或

$$w=H(y),$$

即

$$\frac{xu_x-u}{uu_x+x}=H(\sqrt{x^2+u}),$$

并可化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u+xH(r)}{x-uH(r)},$$

其中 $r=\sqrt{x^2+u^2}$，对此方程在例 3.5.2 中已经讨论.

以 $SO(2)$ 为不变群的全体二阶微分方程为

$$f(y,w,k)=0$$

或

$$k = H(y, w),$$

即

$$u_{xx} = (1 + u_x^2)^{3/2} H\left(\sqrt{x^2 + u^2}, \frac{xu_x - u}{uu_x + x}\right). \quad (3.5.23)$$

令

$$r = \sqrt{x^2 + u^2}, \quad \theta = \arctan\frac{u}{x},$$

即

$$x = r\cos\theta, \quad u = r\sin\theta,$$

则有

$$y = r, \quad w = r\theta_r, \quad k = \frac{r\theta_{rr} + 2\theta_r + r^2\theta_r^2}{(1 + r^2\theta_r^2)^{3/2}}.$$

于是(3.5.23)化为

$$\frac{r\theta_{rr} + r^2\theta_r^2 + 2\theta_r}{(1 + r^2\theta_r^2)^{3/2}} = H(r, r\theta_r), \quad (3.5.24)$$

令 $\theta_r = z$,即 $\theta = \int z(r)\mathrm{d}r + c$, 则(3,5,24)降阶为一阶微分方程

$$r\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = (1 + r^2z^2)^{3/2}H(r, rz) - (r^2z^2 + 2z).$$

例 3.5.9 二阶微分方程

$$x^2u_{xx} + xu_x^2 = uu_x \quad (3.5.25)$$

有一个明显的不变群

$$G: \quad (x, u) \to (\mathrm{e}^{\varepsilon}x, \mathrm{e}^{\varepsilon}u).$$

它有两个显然的一阶不变量

$$y = \frac{u}{x}, \quad w = u_x.$$

由定理 3.5.2,可得到它的二阶微分不变量

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} = \frac{x^2u_{xx}}{xu_x - u},$$

从而可将(3.5.25)化为一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}(w-y)+w^2=yw,$$

即

$$(w-y)\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}+w\right)=0.$$

于是有

$$w=y\text{ 或}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}+w=0,$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{x}\tag{3.5.26}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=c\mathrm{e}^{-\frac{u}{x}},\tag{3.5.27}$$

(3.5.27)给出方程(3.5.25)的通解

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{c\mathrm{e}^{-y}-y}=\ln x+c_1,$$

其中 $y=\frac{u}{x}$，而(3.5.26)则给出(3.5.25)的奇解族 $u=kx$.

§6 偏微分方程的群不变解

偏微分方程的求解比较困难，常用一种方法是，在求方程的某些类型的解时，可将问题转化为求解常微分方程. 例如，KdV 方程

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x,\tag{3.6.1}$$

由于方程中不显含自变量 t，我们在求方程的与 t 无关的解即所谓稳定解 $u=f(x)$时，方程就化为常微分方程

$$f'''+6ff'=0.$$

此外，方程还有非常重要的一类解叫行波解，也就是方程的具有形式 $u=f(\xi)$的解，其中 $\xi=x-ct$，c 为常数. 这时，方程(3.6.1)就化为

$$f''' + 6ff' + cf' = 0. \tag{3.6.2}$$

这就是说,如果 $f(\xi)$ 是方程(3.6.2)的解,则 $u = f(x-ct)$ 就是 KdV 方程(3.6.1)的解.需要注意的是,中间变量 ξ 并不是随便可取的,也不是任意的偏微分方程都有行波解.例如,柱 KdV 方程

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x - \frac{u}{2t} \tag{3.6.3}$$

就没有行波解.若令 $u = f(\xi)$, $\xi = x - ct$,则(3.6.3)化为

$$f''' + 6ff' + cf' - \frac{1}{2t}f = 0.$$

由于方程中仍显含 t,它只有解 $f=0$.

以下将从理论上进行一般性的探讨.为讨论的方便且不失一般性,设 $p=2$, $q=1$,即 $X=\{(x,t)\}$, $U=\{(u)\}$,并考虑偏微分方程

$$\Delta(x,t,u^{(n)}) = \Delta(x,t,u_x,u_t,\cdots) = 0, \tag{3.6.4}$$

设 G 是它的一个单参数不变群,其生成元为 $\underline{v}$,则在 $\underline{v}$ 的正常点近旁可经坐标变换

$$\xi = \xi(x,t,u), \quad \tau = \tau(x,t,u), \quad \omega = \omega(x,t,u), \tag{3.6.5}$$

使在新坐标系 (ξ,τ,ω) 中

$$\underline{v} = \frac{\partial}{\partial \tau},$$

由于 $pr^{(n)}\underline{v} = \frac{\partial}{\partial \tau}$,则由本章§1中的定理3.1.9,必有与(3.6.4)等价的方程

$$\tilde{\Delta}(\zeta,\omega,\omega_\xi,\omega_\tau,\cdots) = 0, \tag{3.6.6}$$

即方程的左端不显含 τ.例如,KdV 方程(3.6.1)有一个平移不变群

$$G_c: (x,t,u) \to (x + c\varepsilon, t + \varepsilon, u),$$

其生成元

$$\underline{v} = c\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

经坐标变换

$$\xi = x - ct, \quad \tau = t, \quad \omega = u,$$

在新坐标系(ξ,τ,ω)中,$\underline{v} = \frac{\partial}{\partial\tau}$,方程(3.6.1)就化为

$$\omega_\tau = \omega_{\xi\xi\xi} + 6\omega\omega_\xi + c\omega_\xi.$$

由于在方程(3.6.6)中不显含τ,当求方程的与τ无关的解,即形如$\omega = \omega(\xi)$的解时,方程就化为常微分方程.由于$\xi(x,t,u)$和$\omega(x,t,u)$满足$\underline{v}\cdot\xi = 0$,$\underline{v}\omega = 0$,它们都是群$G$的不变量.因此,这类解$\omega = \omega(\zeta)$具有在群$G$作用下不变的性质.这种在某一不变群$G$作用下不变的解称为**群$G$不变解**.KdV方程的行波解就是$G_c$不变解,而柱KdV方程(3.6.3)不具有$G_c$不变性,它就没有行波解.

由以上讨论可知,当求方程(3.6.4)的一个不变群的不变解时,方程可约化为常微分方程.在具体约化时,并不需要找到坐标变换(3.6.5),我们只要找到群的不变量ξ和ω.我们也知道,寻找不变量不一定要知道群本身,只要知道群的生成元就够了.

由以上的讨论还可知,若方程中的自变量的个数多于两个,则在求方程的不变群的不变解时,方程虽不能化为常微分方程,但方程的自变量的个数将减少一个.

例 3.6.1 KdV 方程

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x, \tag{3.6.7}$$

有下列四个熟知的不变性:

x平移:$(x,t,u)\to(x+\varepsilon,t,u)$,

t平移:$(x,t,u)\to(x,t+\varepsilon,u)$,

伽利略变换:$(x,t,u)\to\left(x-3t\varepsilon,t,u+\frac{\varepsilon}{2}\right)$,

标量变换:$(x,t,u)\to(e^{-\varepsilon}x,\varepsilon^{-3\varepsilon}t,e^{2\varepsilon}u)$.

在前面讨论过的G_c是x平移和t平移的组合、可理解为沿某一方向的平移,群的不变解就是行波解.

伽利略变换的生成元$\underline{v} = -3t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}$,它有不变量

$$\xi = t, \quad \omega = 6tu + x.$$

其不变解就是表示为 $\omega = f(\xi)$ 的解,即

$$u = \frac{1}{6t}(f(t) - x).$$

将它代入(3.6.7)就得到

$$f'(t) = 0.$$

从而得到解 $f = c$.于是,伽利略变换的不变解为

$$u = \frac{c - x}{6t}.$$

将伽利略变换和 t 平移组合就得到

$$G_a: (x, t, u) \to \left(x - 3t\varepsilon, t + a\varepsilon, u + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

其中 a 为任意非零常数.其生成元为

$$\underline{v} = -3t\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u},$$

它有不变量

$$\zeta = x + \frac{3}{2a}t^2, \quad \omega = u - \frac{t}{2a}.$$

于是,其不变解可表为 $\omega = f(\xi)$,即

$$u = f(\xi) + \frac{t}{2a},$$

将它代入(3.6.7)就得到常微分方程

$$f''' + 6ff' - \frac{1}{2a} = 0,$$

此方程可积分一次,化为

$$f'' + 3f^2 - \frac{\xi}{2a} + c = 0. \tag{3.6.8}$$

这就说明,若 $f(\zeta)$ 是(3.6.8)的解,则

$$u = f\left(x + \frac{3}{2a}t^2\right) + \frac{t}{2a}$$

是 KdV 方程(3.6.7)的解.

上述标量变换的生成元 $\underline{v} = -x\frac{\partial}{\partial x} - 3t\frac{\partial}{\partial t} + 2u\frac{\partial}{\partial u}$,它有不

变量

$$\xi = xt^{-\frac{1}{3}}, \quad \omega = ut^{\frac{2}{3}},$$

群的不变解应表示为 $\omega = f(\xi)$，即

$$u = t^{-\frac{2}{3}} f(\xi),$$

将它代入(3.6.7)，KdV 方程就约化为

$$f''' + 6ff' + \frac{1}{3}\xi f' + \frac{2}{3}f = 0. \tag{3.6.9}$$

这就说明，若 $f(\zeta)$是(3.6.9)的解，则

$$u = t^{-\frac{2}{3}} f(xt^{-\frac{1}{3}})$$

是 KdV 方程(3.6.9)的解.

例 3.6.2 KP 方程

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x - D^{-1}u_{yy} = 0 \tag{3.6.10}$$

$\left(D^{-1} = \int \cdot \, \mathrm{d}x\right)$，即

$$(u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x - u_{yy} = 0 \tag{3.6.11}$$

也是物理学中的一个重要方程，它有三个自变量：x, y, t. 显然，方程有 x 平移，y 平移和 t 平移不变性，其 y 平移不变解应满足的方程即为 KdV 方程

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0,$$

而 t 平移不变解应满足的方程则约化为

$$(u_{xxx} + 6uu_x)_x - u_{yy} = 0.$$

将 x 平移和 t 平移组合，则得到不变群

$$G: (x, y, t, u) \to (x + \varepsilon, y, t - \varepsilon, u),$$

其生成元

$$\underline{v} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t},$$

有不变量

$$\xi = x + t, \quad \eta = y, \quad \omega = u,$$

其不变解就是形如 $\omega = f(\zeta, \eta)$的解，而

$$u = f(\xi,\eta).$$

将它代入 KP 方程，就得到约化的方程

$$f_\xi + f_{\xi\xi\xi} + 6ff_\xi - D_\xi^{-1}f_{\eta\eta}$$

$\left(D_\zeta^{-1} = \int \cdot \, \mathrm{d}\zeta\right)$，即

$$f_{\xi\xi} - f_{\eta\eta} + (f_{\xi\xi\xi} + 6ff_\xi)_\xi = 0.$$

这就是 Boussinesq 方程.

§7 微分方程的对称

在本章的前 5 节中，已对微分方程的不变群的概念，如何寻找不变群，以及如何利用不变群来求常微分方程和偏微分方程的解作了系统的论述．解决问题的关键之一就是利用延拓理论将微分方程的问题转化为代数方程的问题．但是，延拓理论的指导思想虽然简单，但具体操作起来却很麻烦．以下我们将换一下角度来进行研究，其目的是使得微分方程的不变群与生成元的关系以及求不变群的群不变解的问题虽将简明而便于应用．

现在考虑含在两个自变量 x 和 t 的偏微分方程

$$u_t = K(x,t,u,u_x,\cdots), \tag{3.7.1}$$

或简写为

$$u_t = K(x,t,u). \tag{3.7.2}$$

这就是所谓的演化方程．

设 M 是全体连续可微函数 $u(x,t)$ 的集合，即

$$M = \{u(x,t)\},$$

它可以理解为一个无穷维的微分流形．$u = u(x,t)$ 称为方程(3.7.1)的解，如果它使方程成立．于是，方程的解集就表示为

$$N = \{u \in M \mid u_t = K(x,t,u)\}.$$

设 $G = \{g_\varepsilon \mid \varepsilon \in R\}$ 是作用于 M 上的一个单参数变换群，即

$$g_\varepsilon: u \to \bar{u} = \bar{u}(u,\varepsilon).$$

使 $g_0 u = u$，即 $\bar{u}(u,0) = u$，以及

$$(g_\eta \circ g_\varepsilon)u = g_{\varepsilon+\eta}u,$$

于是,对 M 中任一点 u,

$$g_\varepsilon u = \bar{u}(u,\varepsilon) = \bar{u}_\varepsilon(u)$$

可看作是 M 中过 u 的一条曲线(ε 为曲线的参数),也称作 u 在 g_ε 作用下的轨道,而曲线在 u 的切向量就是

$$\left.\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \sigma(u).$$

这就是 M 上与 G 相对应的向量场.反之,我们也不难证明,对 M 上任意给定的向量场 $\sigma(u)$,必有与之相应的单参数变换群.

定义 3.7.1 M 上的变换群 $G=\{g\}$ 称为方程(3.7.1)的一个不变群,如果它将方程的解变为解,即

$$gN \subset N$$

对 G 中的任意元素 g 成立.

作为单参数不变群 $G=\{g_\varepsilon \mid \varepsilon\in R\}$ 的相应的向量场 $\sigma(u)$ 应有何特点? 由

$$\begin{aligned}\bar{u}(u,\varepsilon) &= u + \varepsilon\left.\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \cdots \\ &= u + \varepsilon\sigma(u) + \cdots \end{aligned} \tag{3.7.3}$$

其中 $\sigma(u)$ 就是 G 的向量场,而

$$K(\bar{u}) = K(\bar{u})\mid_{\varepsilon=0} + \varepsilon\left.\frac{\mathrm{d}K(\bar{u})}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \cdots \tag{3.7.4}$$

由于 $K(\bar{u})|_{\varepsilon=0}=K(u)$,以及

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}K(\bar{u})}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}K(u+\varepsilon\sigma)\right|_{\varepsilon=0} \\ &= K'(u)\left.\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = K'(u)\sigma,\end{aligned}$$

其中 $K'(u)$ 表示 $K(u)$ 对 u 的线性化算子,$K'(u)\circ\sigma$ 也可理解为 $K(u)$ 对 u 沿方向 $\sigma(u)$ 的方向导数,也常简记为 $K'\sigma$,它的具体表达式为

$$K'\sigma = \frac{\partial K}{\partial u}\sigma + \frac{\partial K}{\partial u_x}\sigma_x + \frac{\partial K}{\partial u_{xx}}\sigma_{xx} + \cdots,$$

于是(3.7.4)就表示为

$$K(\bar{u}) = K(u) + \varepsilon\sigma(u) + \cdots. \tag{3.7.5}$$

由不变群的定义,如果 $u_t = K(u)$成立,则

$$\bar{u}_t = K(\bar{u})$$

对任意的 ε 成立. 比较(3.7.3)和(3.7.5)就得到与单参数不变群 g_ε 相应的向量场$\sigma(u)$应满足的条件

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = K'\sigma,$$

其中$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}$表示$\sigma$ 对t 的全导数,上条件也常记作

$$\sigma_t = K'\sigma. \tag{3.7.6}$$

需注意,上述条件中须假定 u 的方程(3.7.1)的解. 我们把这样的与方程的单参数不变群的相对应的向量场 $\sigma(u)$称为方程(3.7.1)的一个对称. 由

$$\sigma_t = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \sigma' u_t = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \sigma' K,$$

(3.7.6)就可以改写为

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = [K, \sigma],$$

其中$[K,\sigma] = K'\sigma - \sigma' K$,称为 K 和σ 的**换位子**. 又由于 u_t 可以用$K(u)$代替,我们可以假定σ不含有u_t 以及它的各阶偏导数,这时(3.7.7)就应为恒等式.

定义 3.7.2 $\sigma(x,t,u,u_x,u_{xx},\cdots)$称为方程(3.7.1)的一个**对称**,如果

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = [K, \sigma] \tag{3.7.7}$$

对 M 中的任意元素u 成立.

特别,当σ不显含t 时,(3.7.7)就简化为

$$[K, \sigma] = 0.$$

例 3.7.1 KdV 方程

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x. \tag{3.7.8}$$

由于

$$K = u_{xxx} + 6uu_x,$$
$$K' = D^3 + 6uD + 6u_x$$

$\left(D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$. 于是,$\sigma(x,t,u)$是对称的条件为

$$\sigma_t = \sigma_{xxx} + 6u\sigma_x + 6u\sigma.$$

不难验证,

$$K_0 = u_x, \quad K_1 = u_{xxx} + 6uu_x = u_t,$$
$$\tau_0 = 3tu_x + \frac{1}{2}, \ \tau_1 = 3tu_t + xu_x + 2u$$

都是 KdV 方程(3.7.8)的对称. 例如,当 $\sigma = K_0$ 时,$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=0, \sigma' = D$,而

$$\begin{aligned}[K,\sigma] &= K'\sigma - \sigma'K \\ &= (D^3 + 6uD + 6u_x)u_x - D(u_{xxx} + 6uu_x) = 0.\end{aligned}$$

这就证明了 $K_0 = u_x$ 是 KdV 方程的对称.

由于对称 σ 所满足的方程(3.7.6)是线性的,所以,对称的实系数线性组合仍是对称,换句话说,全体对称构成一个线性空间.

对上述 KdV 方程的对称 K_0, K_1, τ_0 和 τ_1,它们对换位运算还满足下列关系:

$$\begin{aligned} &[K_0,K_1] = 0, && [K_0,\tau_0] = 0, \\ &[K_0,\tau_1] = K_0, && [K_1,\tau_0] = 3K_0, \\ &[K_1,\tau_1] = 3K_1, && [\tau_0,\tau_1] = -2\tau_0. \end{aligned}$$

所以,它们对换位运算还构成一个李代数.

反之,如何由已知的对称求与它相应的单参数不变群?

定理 3.7.1 设 $\sigma(u)$是方程(3.7.1)的一个对称,$\bar{u}(u,\varepsilon)$满足方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\varepsilon} = \sigma(\bar{u}), \\ \bar{u}\,|_{\varepsilon=0} = u, \end{cases} \tag{3.7.9}$$

则

$$g_\varepsilon: u \to \bar{u}$$

是(3.7.1)的一个单参数不变群.

证明 首先证明 g_ε 将方程(3.7.1)的解变为解,即若 $u_t = K(u)$,则 $\bar{u}_t = K(\bar{u})$. 由

$$\frac{d\bar{u}_t}{d\varepsilon} = \left(\frac{d\bar{u}}{d\varepsilon}\right)_t = (\sigma(\bar{u}))_t = \frac{\partial\sigma(\bar{u})}{\partial t} + \sigma'(u)\bar{u}_t, \tag{3.7.10}$$

$$\frac{dK(\bar{u})}{d\varepsilon} = K'(\bar{u})\frac{d\bar{u}}{d\varepsilon} = K'(\bar{u})\sigma(\bar{u}),$$

以及条件(3.7.7),

$$K'(\bar{u})\sigma(\bar{u}) = \frac{\partial\sigma(\bar{u})}{\partial t} + \sigma'(\bar{u})K(\bar{u}),$$

对任意的 $\bar{u}(\in M)$成立,即有

$$\frac{dK(\bar{u})}{d\varepsilon} = \frac{\partial\sigma(\bar{u})}{\partial t} + \sigma'(\bar{u})K(\bar{u}). \tag{3.7.11}$$

比较(3.7.10)和(3.7.11)即可知,$\bar{u}_t$ 和 $K(\bar{u})$作为 ε 的函数满足相同的常微分方程.并且,当 $\varepsilon=0$ 时,

$$\bar{u}_t\,|_{\varepsilon=0} = u_t,$$

$$K(\bar{u})\,|_{\varepsilon=0} = K(u).$$

由 $u_t = K(u)$, $\bar{u}_t$ 和 $K(\bar{u})$有相同的初值,根据常微分方程的解的存在惟一性定理,

$$\bar{u}_t = K(\bar{u}),$$

即 $\bar{u}$ 是(3.7.1)的解.

进一步证明 g_ε 是方程(3.7.1)的单参数不变群.由 $\bar{u}\,|_{\varepsilon=0} = u$, g_0 为恒同映射.进一步只须证明对任意的实数 ε 和 η, $g_\varepsilon \circ g_\eta = g_{\varepsilon+\eta}$成立.由

$$(g_\varepsilon \circ g_\eta)u = g_\varepsilon(g_\eta u) = g_\varepsilon(\bar{u}(u,\eta)) = \bar{\bar{u}}(u,\varepsilon,\eta)$$

和

$$g_{\varepsilon+\eta}u = \bar{u}(u,\varepsilon+\eta) = \tilde{u}(u,\varepsilon,\eta),$$

作为 ε 的函数,它们满足相同的微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\varepsilon} = \sigma(\bar{u}),$$

并且,当 $\varepsilon=0$ 时,

$$\bar{u}(u,\varepsilon,\eta)\,|_{\varepsilon=0} = \bar{u}(u,\eta),$$

$$\tilde{u}(u,\varepsilon,\eta)\,|_{\varepsilon=0} = \bar{u}(u,\eta),$$

即有相同的初始值,所以

$$(g_\varepsilon \circ g_\eta)u = g_{\varepsilon+\eta}u.$$

例 3.7.2 求 KdV 方程

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x$$

的对称 $K_0=u_x, K_1=u_t, \tau_0=3tu_x+\frac{1}{2}$ 和 $\tau_1=3tu_t+xu_x+2u$ 相应的单参数变换群.

求 $K_0=u_x$ 相应的单参数变换群只须解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\varepsilon} = \bar{u}_x,\quad \bar{u}\,|_{\varepsilon=0} = u, \tag{3.7.12}$$

不难解得 $\bar{u}=u(x+\varepsilon,t)$. 这就得到相应的单参数变换群

$$g_\varepsilon: u \to \bar{u} = u(x+\varepsilon,t),$$

即所谓 x 平移. 要求 $K_1=u_t$ 的相应的单参数变换群,只需将方程(3.7.12)中的 $\bar{u}_x$ 换成 $\bar{u}_t$,可知其相应的单参数变换群为

$$g_\varepsilon: u \to \bar{u} = u(x,t+\varepsilon)$$

即 t 平移. 对 $\tau_0=3tu_x+\frac{1}{2}$,要解微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\varepsilon} = 3t\bar{u}_x + \dfrac{1}{2},\\ \bar{u}\,|_{\varepsilon=0} = 0.\end{cases} \tag{3.7.13}$$

不难看出,方程

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{1} = \frac{\mathrm{d}x}{-3t} = \frac{\mathrm{d}t}{0} = \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{1/2}$$

有下列三个独立的首次积分: $x+3t\varepsilon, t, \bar{u}-\frac{\varepsilon}{2}$,这就得到(3.7.13)的解

$$\bar{u} = f(x + 3t\varepsilon, t) + \frac{\varepsilon}{2}$$

(f 为任意函数). 再由初始条件 $\bar{u}|_{\varepsilon=0} = u$ 即可得到

$$\bar{u} = u(x + 3t\varepsilon, t) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

这就得到与 τ_0 相应的单参数变换群

$$g_\varepsilon : u \to \bar{u} = u(x + 3t\varepsilon, t) + \frac{\varepsilon}{2},$$

即伽利略变换. 对 $\tau_1 = 3tu_t + xu_x + 2u$, 需解微分方程

$$\frac{d\bar{u}}{d\varepsilon} = 3t\bar{u}_t + x\bar{u}_x + 2\bar{u}, \tag{3.7.14}$$

由于

$$\frac{d\varepsilon}{1} = \frac{dt}{-3t} = \frac{dx}{-x} = \frac{d\bar{u}}{2\bar{u}}$$

有下列三个独立的首次积分: $te^{3\varepsilon}, xe^{\varepsilon}, \bar{u}e^{-2\varepsilon}$. 可知方程的解为

$$\bar{u} = e^{2\varepsilon} f(xe^{\varepsilon}, te^{3\varepsilon})$$

(f 为任意函数), 再由初始条件 $\bar{u}|_{\varepsilon=0} = u$ 即可得到

$$\bar{u} = e^{2\varepsilon} u(xe^{\varepsilon}, te^{3\varepsilon}).$$

于是, 与 τ_1 相应的单参数变换群为

$$g_\varepsilon : u \to \bar{u} = e^{2\varepsilon} u(xe^{\varepsilon}, te^{3\varepsilon})$$

这就是所谓标量变换.

一般的, 对微分方程组

$$F_i(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \cdots) = 0, \quad i = 1, \cdots, n \tag{3.7.15}$$

也可以作类似的讨论. 这时, 方程的对称 $\sigma = (x, t, u)$ 应满足的条件为

$$F_i'(u)\sigma = 0, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{3.7.16}$$

例如, Sine-Gordon 方程

$$u_{xt} = \sin u$$

的对称 σ 应满足的条件为

$$\sigma_{xt} = \sigma \cos u.$$

Kadomtsev-Petviashvili 方程即 KP 方程

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x - D^{-1}u_{yy} = 0$$

或

$$(u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x - D^{-1}u_{yy} = 0$$

的对称 σ 应满足的条件则为

$$\sigma_t + \sigma_{xxx} + 6u\sigma_x + 6u_x\sigma - D^{-1}\sigma_{yy} = 0$$

或

$$(\sigma_t + \sigma_{xxx} + 6u\sigma_x + 6u_x\sigma)_x - \sigma_{yy} = 0.$$

例 3.7.3 含有多个未知函数的方程,例如

$$\begin{cases} q_t = K_1(x,t,q,r,q_x,r_x,\cdots), \\ r_t = K_2(x,t,q,r,q_x,r_x,\cdots). \end{cases} \tag{3.7.17}$$

可以表示为向量形式

$$\underline{u}_t = \underline{K}(x,t,q,r),$$

其中 $\underline{u} = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}$, $\underline{K} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$. 有关方向导数的概念可以同样定义,例如

$$\underline{K}'(u)\underline{\sigma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}K(\underline{u} + \varepsilon\underline{\sigma})\Big|_{\varepsilon=0},$$

其中 $\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}K(u + \varepsilon\sigma)\Big|_{\varepsilon=0} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}K_1(q + \varepsilon\sigma_1, r + \varepsilon\sigma_2)\Big|_{\varepsilon=0} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}K_2(q + \varepsilon\sigma_1, r + \varepsilon\sigma_2)\Big|_{\varepsilon=0} \end{pmatrix},$$

即有

$$\underline{K}'\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} K'_{1q}\sigma_1 + K'_{1,r}\sigma_2 \\ K'_{2q}\sigma_1 + K'_{2,r}\sigma_2 \end{pmatrix},$$

式中 $K'_{1q}\sigma_1$ 表示 K_1 对 q 沿 σ_1 的方向导数,$K'_{1,r}\sigma_2$ 则表示 K_1 对 r 沿 σ_2 的方向导数. 因此,方程组(3.7.17)的对称应满足的条件则为

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix}K'_{1q} & K'_{1r}\\ K'_{2q} & K'_{2r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix},$$

或简写为

$$\underline{\sigma_t} = \underline{K'}\,\underline{\sigma},$$

其中 K' 则为

$$K' = \begin{pmatrix}K'_{1q} & K'_{1r}\\ K'_{2q} & K'_{2r}\end{pmatrix}.$$

例如,方程组

$$\begin{cases} q_t = -q_{xxx} + 6qrq_x, \\ r_t = -r_{xxx} + 6qrr_x \end{cases} \tag{3.7.18}$$

的对称 $\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}$ 应满足的条件为

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix}-D^3 + 6qrD + 6q_xr & 6qq_x\\ 6rr_x & -D^3 + 6qrD + 6qr_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}.$$

进一步的问题就是如何求得微分方程的对称.有一些简单的对称可以从方程的物理意义和对方程的观察得到.例如,上述 KdV 方程的四个对称都有它们的物理解释.还可以看到,如果方程中不显含 x,则 u_x 就是对称,如果方程中不显含 t,则 u_t 就是对称.不过,为了寻找比较复杂的对称,我们还需要作进一步的考虑.

一个自然的考虑就是由已知的对称去生成新的对称.

假设 $\Phi(x,t,u)$ 是作用于 M 的一个算子.对任意函数 $a(x,t)$,Φa 仍是一个函数,作为算子 Φ,我们也可以定义它对 u 沿方向 σ 的方向导数,并记作 $\Phi_u'[\sigma]$ 或 $\Phi'[\sigma]$,即

$$\Phi'[\sigma] = \frac{d}{d\varepsilon}\Phi(u + \varepsilon\sigma)\big|_{\varepsilon=0}. \tag{3.7.19}$$

显然,$\Phi'[\sigma]$ 仍是一个算子.

定理 3.7.2 对任意的算子 $\Phi(x,t,u)$ 和任意的函数 $a(x,t,u)$ 和 $b(x,t,u)$,

$$(\Phi a)'b = (\Phi'[b])a + \Phi(a'b). \tag{3.7.20}$$

证明 根据定义,

$$(\Phi a)'b = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}(\Phi(u+\varepsilon b)a(u+\varepsilon b))\Big|_{\varepsilon=0}$$
$$= \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Phi(u+\varepsilon b)\right)a(u+\varepsilon b)\right)\Big|_{\varepsilon=0}$$
$$+ \left(\Phi(u+\varepsilon b)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}a(u+\varepsilon b)\right)\Big|_{\varepsilon=0}$$
$$= (\Phi'[b])a + \Phi(a'b).$$

特别,对任意的函数 $F(x,t,u)$,F' 是 F 的线性化算子.下面证明,F' 的方向导数有下列对称的性质.

定理 3.7.3 对任意的函数 $F(x,t,u)$,$a(x,t,u)$ 和 $b(x,t,u)$,

$$(F')'[a]b = (F')'[b]a. \tag{3.7.21}$$

证明 根据定义

$$(F')'[a]b = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon_1}F'(u+\varepsilon_1 a)\Big|_{\varepsilon=0}\right)b$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon_2}F(u+\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b)\Big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon_1}F(u+\varepsilon_2 a+\varepsilon_1 b)\Big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}$$
$$= (F')'[b]a.$$

定义 3.7.3 算子 $\Phi(x,t,u)$ 称为微分方程的一个强对称,如果它将方程的对称变为对称,也就是说,若 $\sigma(x,t,u)$ 是方程的对称,则 $\Phi\sigma$ 也是方程的对称.

定理 3.7.4 Φ 是方程(3.7.1)的一个强对称,如果它满足

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = [K',\Phi], \tag{3.7.22}$$

其中 $[K',\Phi] = K'\circ\Phi - \Phi\circ K'$,$u$ 是方程(3.7.1)的解.

证明 设 $\sigma(x,t,u)$ 是(3.7.1)的一个对称,即

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = K'\sigma.$$

于是

$$\frac{d(\Phi\sigma)}{dt}=\frac{d\Phi}{dt}\sigma+\Phi\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)=[K',\Phi]\sigma+\Phi(K'\sigma)=K'(\Phi\sigma).$$

这就证明了 $\Phi\sigma$ 也是(3.7.1)的对称.所以 Φ 是(3.7.1)的强对称.

显然,条件(3.7.22)也可以表示为

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\Phi'[K]=[K',\Phi]. \tag{3.7.23}$$

特别,若 Φ 不显含 t,则上条件就简化为

$$\Phi'[K]=[K',\Phi]. \tag{3.7.24}$$

例 3.7.4 KdV 方程

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x$$

有一个强对称

$$\Phi=D^2+4u+2u_xD^{-1}$$

$(D^{-1}=\int\cdot\,dx)$.这是因为

$$\begin{aligned}\Phi'[K]&=4K+2K_xD^{-1}\\&=4(u_{xxx}+6uu_x)+2(u_{xxxx}+6uu_{xx}+6u_x^2)D^{-1},\\ [K',\Phi]&=(D^2+6uD+6u_x)(D^2+4u+2u_xD^{-1})\\&\quad-(D^2+4u+2u_xD^{-1})(D^2+6uD+6u_x),\end{aligned}$$

直接计算即可得到

$$\Phi'[K]=[K',\Phi].$$

又因为 Φ 不显含 t,所以 Φ 是 KdV 方程的强对称.

不难看出,前面提到的 KdV 方程的四个对称 K_0,K_1,τ_0 和 τ_1 之间存在下列关系

$$K_1=\Phi K_0,\qquad \tau_1=\Phi\tau_0.$$

即 K_1 和 τ_1 可以由 K_0 和 τ_0 通过强对称 Φ 生成.事实上,方程的任一个对称经由强对称都可能生成无穷个对称.对上述 KdV 方程,由 K_0,τ_0 就可以生成下列两组无穷个对称:

$$K_n=\Phi^nK_0,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$\tau_n=\Phi^n\tau_0,\qquad n=0,1,2,\cdots$$

(Φ^0 为恒同).

由已知的对称去生成新的对称的另一个途径就是通过它们的换位运算.换位运算在前面已有说明.为了系统地叙述并强调它的重要性,现重述它的定义.

以下 $f(x,t,u)$表示 f 是x,t,u 和u 对x 以及t 的各阶偏导数的函数.

定义 3.7.4 设 $a(x,t,u)$和 $b(x,t,u)$为任意函数,

$$[a,b]=a'b-b'a$$

称为 a 和b 的**换位子**.

定理 3.7.5 对任意的函数 a,b,c 和任意的常数λ 和μ,

$$[a,b]=-[b,a], \tag{3.7.25}$$

$$[\lambda a+\mu b,c]=\lambda[a,c]+\mu[b,c], \tag{3.7.26}$$

$$[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b]=0. \tag{3.7.27}$$

证明 (3.7.25)和(3.7.26)由定义立即可得.下面证明(3.7.27).根据定义和定理 3.7.2,

$$\begin{aligned}[[a,b],c]&=[a'b-b'a,c]\\&=(a'b)'c-(b'a)'c-c'(a'b)+c'(b'a)\\&=(a')'[c]b+a'(b'c)-(b')'[c]a-b'(a'c)\\&\quad-c'(a'b)+c'(b'a).\end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned}[[b,c],a]&=(b')'[a]c+b'(c'a)-(c')[a]b-c'(b'a)\\&\quad-a'(b'c)+a'(c'b),\\ [[c,a],b]&=(c')'[b]a+c'(a'b)-(a')'[b]c-a'(c'b)\\&\quad-b'(c'a)+b'(a'c).\end{aligned}$$

由定理 3.7.3 即得

$$[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b]=0.$$

由此可知,全体上述函数对线性运算和换位运算构成一个李代数.(3.7.27)称为**Jacobi 等式**.

对于一个任意给定的微分方程,显然,它的任意两个对称的线性组合仍是对称.以下证明,任意两个对称的换位子也一定是

对称.

定理 3.7.6 设 $\sigma_1(x,t,u)$ 和 $\sigma_2(x,t,u)$ 是方程

$$u_t = K(x,t,u)$$

的对称,则 $\sigma = [\sigma_1,\sigma_2]$ 也是此方程的对称.

证明 首先证明,对任意的函数 $a(x,t,u)$ 和 $b(x,t,u)$,

$$\frac{\mathrm{d}(a'b)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)'b. \tag{3.7.28}$$

这是因为

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)'b = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}(u+\epsilon b)\bigg|_{\epsilon=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}(a+\epsilon a'b+\cdots)\bigg|_{\epsilon=0}$$

$$= \frac{\mathrm{d}(a'b)}{\mathrm{d}t}.$$

根据定理的假设和对称的定义,

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\mathrm{d}t} = K'\sigma_1, \qquad \frac{\mathrm{d}\sigma_2}{\mathrm{d}t} = K'\sigma_2,$$

由(3.7.28)和定理 3.7.2,

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sigma_1,\sigma_2] = \frac{\mathrm{d}(\sigma_1'\sigma_2)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}(\sigma_2'\sigma_1)}{\mathrm{d}t}$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\mathrm{d}t}\right)'\sigma_2 - \left(\frac{\mathrm{d}\sigma_2}{\mathrm{d}t}\right)'\sigma_1 = (K'\sigma_1)'\sigma_2 - (K'\sigma_2)'\sigma_1$$

$$= (K')'[\sigma_2]\sigma_1 + K'(\sigma'_1\sigma_2) - (K')'[\sigma_1]\sigma_2 - K'(\sigma'_2\sigma_1),$$

再由定理 3.7.3,

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = K'(\sigma'_1\sigma_2) - K'(\sigma'_2\sigma_1) = K'[\sigma_1,\sigma_2] = K'\sigma,$$

所以 σ 是方程的对称.

由此可知,一个微分方程的全体对称对线性运算和换位运算构成一个李代数.

前面已经说明,KdV 方程的对称 K_0, K_1, τ_0 和 τ_1 对换位运算构成一个李代数.这样,由这四个对称通过换位运算并不能生成新的对称,进一步还可以证明,KdV 方程的两组对称 K_n 和 τ_n($n=0,1,2\cdots$)对换位运算也构成一个李代数,并满足下列关系:

$$[K_m, K_n] = 0, \tag{3.7.29}$$

$$[K_m, \tau_n] = (2m+1)K_{m+n-1}, \tag{3.7.30}$$

$$[\tau_m, \tau_n] = 2(m-n)\tau_{m+n-1} \tag{3.7.31}$$

$(m, n = 0, 1, 2, \cdots, K_{-1} = 0 = \tau_{-1})$.

由此可知,由 K_n 和 $\tau_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 也不能通过换位运算生成新的对称,不过,对一些难于找到强对称的方程,通过已知的对称的换位运算生成新的对径却是一个有效的方法.

例 3.7.5 KP 方程

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x - D^{-1}u_{yy} = 0$$

的对称 $\sigma(x, t, y, u)$ 应满足的条件为

$$\sigma_t + \sigma_{xxx} + 6u\sigma_x + 6u_x\sigma - D^{-1}\sigma_{yy} = 0.$$

可以验证,方程有下列对称:

$$K_0 = \frac{1}{3}u_x,$$

$$K_1 = \frac{2}{3}u_y,$$

$$K_2 = D^{-1}u_{yy} - u_{xxx} - 6uu_x (= u_t),$$

$$K_3 = \frac{4}{3}D^{-2}u_{yyy} - 4u_{yxx} - 8u_xD^{-1}u_y - 16uu_y,$$

$$\begin{aligned}K_4 = {} & \frac{3}{5}D^{-3}u_{yyy} + 3u_{xxxxx} - 10u_{yxx} - 90u^2u_x - 10u_xD^{-1}u_y \\ & - 20uD^{-1}u_{yy} - 5D^{-1}(u_y^2)_{yy} + 30u_{xxx}u + 60u_{xx}u_x \\ & - 20u_yD^{-1}u_y,\end{aligned}$$

$$\tau_0 = tK_0 - \frac{1}{18},$$

$$\tau_1 = tK_1 + yK_0,$$

$$\tau_2 = tK_2 + yK_1 + xK_0 + \frac{2}{3}u,$$

$$\tau_3 = tK_3 + yK_2 + xK_1 + \frac{4}{3}D^{-1}u_y,$$

$$\tau_4 = tK_4 + yK_3 + xK_2 + 2D^{-1}u_{yy} - 4u_{xx} - 8u^2 - 2u_xD^{-1}u.$$

还可以进一步验证它们之间的换位运算满足下列关系：

$$[K_i,K_j]=0,\ [K_i,\tau_j]=\frac{i+1}{3}K_{i+j-2},\ [\tau_i,\tau_j]=\frac{i-j}{3}\tau_{i+j-2}.$$

$i,j=0,1,2,3,4,i+j-2\leqslant 4$. 当 $i+j-2>4$ 时，则可以通过换位运算产生新的对称. 令

$$K_n=\frac{3}{n}[K_{n-1},\tau_3],\quad \tau_n=\frac{3}{n-4}[\tau_{n-1},\tau_3],$$

$n>4$. 这样，就有了 KP 方程的两组对称：K_n 和 $\tau_n(n=0,1,2,\cdots)$，并且还可以证明它们满足下列李代数关系：

$$[K_m,K_n]=0,[K_m,\tau_n]=\frac{m+1}{3}K_{m+n-2},[\tau_m,\tau_n]$$

$$=\frac{m-n}{3}\tau_{m+n-2}.$$

KP 方程含有自变量 t,x 和 y，这类方程称为 1+2 维的，它也可以看作是 KdV 方程向高维的推广，也常称为 1+2 维的 KdV 方程. 事实上，KP 方程还有许多对称，可以想像，方程自变量愈多则对称愈多.

有一些微分方程之间存在某种变换关系. 例如，KdV 方程和 Modified KdV(MKdV) 方程之间存在 Miura 变换；Burger 方程与热传导方程之间存在 Cole-Hopf 变换；KdV 方程和柱 KdV 方程之间也存在变换关系，不过这种变换不仅限于未知函数之间，自变量也要经过变换. 我们也可以通过这种变换关系由一个方程的对称去求得另一个方程的对称.

对演化方程

$$u_t=K(x,t,u) \tag{3.7.32}$$

考虑变换

$$\xi=\xi(x,t),\quad \tau=\tau(x,t),\quad u=F(x,t,v), \tag{3.7.33}$$

通常都假定变换是可逆的，且 $\tau_t\neq 0$. 于是，

$$u_t=F_t=\frac{\partial F}{\partial t}+Tv_t$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} + T(v_\xi \xi_t) + T(v_\tau \tau_t), \qquad (3.7.34)$$

其中 T 表示 F 对 v 的线性化算子 $F_v{}'$，即 $T = F'$.

将(3.7.34)代入(3.7.32)，则得到

$$T(v_\tau \tau_t) = K \circ F - \frac{\partial F}{\partial t} - T(v_\xi \xi_t), \qquad (3.7.35)$$

若有函数 $H(\xi, \tau, v)$ 使得

$$K \circ F - \frac{\partial F}{\partial t} - T(v_\xi \xi_t) = T(H(\xi, \tau, v)\tau_t), \quad (3.7.36)$$

则(3.7.35)就归结为

$$T((v_\tau - H(\xi, \tau, v))\tau_t) = 0.$$

这样，(3.7.33)就给出方程(3.7.31)和方程

$$v_\tau = H(\xi, \tau, v) \qquad (3.7.37)$$

之间的一个变换关系．以下将讨论由变换(3.7.33)诱导出的方程(3.7.32)和方程(3.7.37)的对称、强对称以及对称的李代数之间的关系．

为了方便，记号 F 有时也统指变换 $(\xi, \tau, v) \to (x, t, u)$．为了下面讨论的需要，还须指出下列两个结论．一是

$$(K \circ F)' = K'F' = K'T, \qquad (3.7.38)$$

它可以由定义不难证得．对此式须特别指出的是，左端 $(K \circ F)'$ 表示对 v 的线性化算子，而右端的 K' 则是对 u 的，以下也常有类似的情况，均不特别声明．另一个结论是，对任意的函数 $a(\xi, \tau, v)$ 和 $b(\xi, \tau, v)$，

$$T'[a]b = T'[b]a, \qquad (3.7.39)$$

这是由于 $T = F'$，应用定理 3.7.3 立即可得．

定理 3.7.7 若 $\bar{\sigma}(\zeta, \tau, v)$ 是(3.7.37)的对称，则 $\sigma = T\bar{\sigma}$（作为 x, t 和 u 的函数）是(3.7.32)的对称．

证明

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dT}{dt}\bar{\sigma} + T\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t}\bar{\sigma} + T'[v_t]\bar{\sigma} + T\frac{d\bar{\sigma}}{dt}$$

$$= \frac{\partial T}{\partial t}\tilde{\sigma} + T'[v_\xi \xi_t]\tilde{\sigma} + T'[v_\tau \tau_t]\tilde{\sigma} + T\left(\frac{d\tilde{\sigma}}{d\xi}\xi_t\right) + T\left(\frac{d\tilde{\sigma}}{d\tau}\tau_t\right)$$

(注意 T 为一线性算子). 又由(3.7.36)和(3.7.38),

$$K'\sigma = K'(T\tilde{\sigma}) = (K \circ F)'\tilde{\sigma}$$

$$= \frac{\partial T}{\partial t}\tilde{\sigma} + (T(v_\xi \xi_t))'\tilde{\sigma} + (T(H\tau_t))'\tilde{\sigma}$$

$$= \frac{\partial T}{\partial t}\tilde{\sigma} + T'[\tilde{\sigma}](v_\xi \xi_t) + T(v_\xi \xi_t)'\tilde{\sigma} + T'[\tilde{\sigma}](H\tau_t) + TH'\tilde{\sigma}\tau_t$$

$$= \frac{\partial T}{\partial t}\tilde{\sigma} + T'[\tilde{\sigma}](v_\xi \xi_t) + T\frac{d\tilde{\sigma}}{d\xi}\xi_t + T'[\tilde{\sigma}](H\tau_t) + TH'\tilde{\sigma}\tau_t.$$

根据(3.7.39),

$$T'[v_\xi \xi_t]\tilde{\sigma} = T'[\tilde{\sigma}](v_\xi \xi_t),\ T'[v_\tau \tau_t]\tilde{\sigma} = T'[\tilde{\sigma}](v_\tau \tau_t).$$

因此

$$\frac{d\sigma}{dt} - K'\sigma = T\left(\left(\frac{d\tilde{\sigma}}{d\tau} - H'\tilde{\sigma}\right)\tau_t\right).$$

由于 $\tilde{\sigma}$ 是(3.7.37)的对称, $\frac{d\tilde{\sigma}}{d\tau} - H'\tilde{\sigma} = 0$, 所以

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = K'\sigma,$$

σ 是(3.7.32)的对称.

容易看出,这个定理的逆也是也成立的. 这就是说,若 σ 是(3.7.32)的对称,则 $\tilde{\sigma} = T^{-1}\sigma (= T^{-1}\sigma \circ F)$是 3.7.37 的对称.

定理 3.7.8 $\Phi(x,t,u)$是方程(3.7.32)的强对称必须且只须 $\tilde{\Phi}(\xi,\tau,v) = T^{-1}\Phi T (= T^{-1}\Phi T \circ F)$是(3.7.37)的强对称.

证明 由上定理, σ 是(3.7.32)的对称必须且只须 $\tilde{\sigma} = T^{-1}\sigma$ 是(3.7.37)的对称. 又由

$$\Phi\sigma = T\tilde{\Phi}T^{-1}\sigma = T(\tilde{\Phi}\tilde{\sigma})$$

可知, $\Phi\sigma$ 是(3.7.32)的对称必须且只须 $\tilde{\Phi}\tilde{\sigma}$ 是(3.7.37)的对称. 所以, $\tilde{\Phi}$ 是(3.7.37)的强对称必须且只须 Φ 是(3.7.32)的强对称.

定理 3.7.9 对任意的函数 $\tilde{a}(\xi,\tau,v)$和 $\tilde{b}(\xi,\tau,v)$,

$$[T\tilde{a}, T\tilde{b}] = T[\tilde{a}, \tilde{b}] \tag{3.7.40}$$

(注意,等式中换位运算中的方向导数,左端对 u,右端对 v).

证明

$$[T\tilde{a},T\tilde{b}]=(T\tilde{a})_u'(T\tilde{b})-(T\tilde{b})_u'(T\tilde{a})$$
$$=(T\tilde{a})_v\tilde{b}-(T\tilde{b})_v'\tilde{a}$$
$$=T'[\tilde{b}]\tilde{a}+T\tilde{a}'b-T'[\tilde{a}]\tilde{b}+T\tilde{b}'\tilde{a},$$

由(3.7.39),$T'[\tilde{b}]\tilde{a}-T'[\tilde{a}']\tilde{b}=0$,所以

$$[T\tilde{a},T\tilde{b}]=T\tilde{a}'\tilde{b}-T\tilde{b}'\tilde{a}=T[\tilde{a},\tilde{b}].$$

特别,若 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$ 是(3.7.37)的对称,则 $T\tilde{a}$ 和 $T\tilde{b}$ 是(3.7.32)的对称,(3.7.40)给出了(3.7.37)和(3.7.32)的相应的对称的李代数之间的同构关系.

例 3.7.6 MKdV 方程

$$\varphi_t=\varphi_{xxx}-6\varphi^2\varphi_x \tag{3.7.41}$$

与 KdV 方程

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x$$

之间存在著名的 Miura 变换

$$u=\varphi_x-\varphi^2.$$

事实上,由直接计算就能得到

$$(u_t-u_{xxx}-6uu_x)\big|_{u=\varphi_x-\varphi^2}=(D-2\varphi)(\varphi_t-\varphi_{xxx}+6\varphi^2\varphi_x),$$

于是

$$T=(D-2\varphi).$$

已经知道 KdV 方程有一个强对称

$$\Phi=D^2+4u+2u_xD^{-1}.$$

由

$$(D^2+4u+2u_xD^{-1})\circ(D-2\varphi)$$
$$=(D^2+4(\varphi_x-\varphi^2)+2(\varphi_{xx}-2\varphi\varphi_x)D^{-1})\circ(D-2\varphi)$$
$$=D^3-4\varphi^2D-2\varphi D^2-12\varphi\varphi_x+8\varphi^3-4\varphi_{xx}D^{-1}\varphi+8\varphi\varphi_xD^{-1}\varphi,$$
$$(D-2\varphi)\circ(D^2-4\varphi^2-4\varphi_xD^{-1}\varphi)$$
$$=D^3-8\varphi\varphi_x-4\varphi^2D-4D(\varphi_xD^{-1}\varphi)-2\varphi D^2+8\varphi^3+8\varphi\varphi_xD^{-1}\varphi,$$

以及

$$D(\varphi_x D^{-1}\varphi) = \varphi_{xx}D^{-1}\varphi + \varphi\varphi_x,$$

就得到

$$\Phi \circ T = T \circ (D^2 - 4\varphi^2 - 4\varphi_x D^{-1}\varphi).$$

根据定理 3.7.8,

$$\tilde{\Phi} = D^2 - 4\varphi^2 - 4\varphi_x D^{-1}\varphi$$

是 MKdV 方程(3.7.41)的一强对称.

应用定理 3.7.7,由 KdV 方程的两组对称 K_n 和 $\tau_n(n=0,1,2,\cdots)$就可以得 MKdV 方程的两组对称:

$$\tilde{K}_n = \tilde{\Phi}^n\tilde{K}_0 = T^{-1}K_n, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

$$\tilde{\tau}_n = \tilde{\Phi}^n\tilde{\tau}_0 = T^{-1}\tau_n, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

其中

$$\tilde{K}_0 = T^{-1}K_0 = (D-2\varphi)^{-1}u_x = \varphi_x,$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_0 &= (D-2\varphi)^{-1}\left(3tu_x + \frac{1}{2}\right)\\ &= 3t\varphi_x + (D-2\varphi)^{-1}\frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_1 &= (D-2\varphi)^{-1}(3tu_t + xu + 2u)\\ &= 3t\varphi_t + x\varphi_x + \varphi.\end{aligned}$$

进一步由定理 3.7.9 可知 $\tilde{K}_n$ 和 $\tilde{\tau}_n(n=0,1,2,\cdots)$也满足下列李代数关系:

$$[\tilde{K}_m, \tilde{K}_n] = 0,$$

$$[\tilde{K}_m, \tilde{\tau}_n] = (2m+1)\tilde{K}_{m+n-1},$$

$$[\tilde{\tau}_m, \tilde{\tau}_n] = 2(m-n)\tilde{\tau}_{m+n-1}$$

$(m,n=0,1,2\cdots,\tilde{K}_{-1}=0=\tilde{\tau}_{-1})$.

例 3.7.7 推广的 KdV 方程

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x + 6fu + x(f' - 12f^2) \qquad (3.7.42)$$

(f 是 t 的任意函数). 它是 KdV 方程($f=0$)和柱 KdV 方程$\left(f=-\dfrac{1}{12t}\right)$的统一和推广. 令

$$\xi = xg^{1/2}, \tau = \int g^{3/2}\mathrm{d}t, \tag{3.7.43}$$

$$u = xf + gv. \tag{3.7.44}$$

其中 $g = e^{12\int f\mathrm{d}t}(g' = 12fg)$，则有

$$u_t - u_{xxx} - 6uu_x - 6fu - x(f' - 12f^2)$$
$$= g^{3/2}(v_\tau - v_{\xi\xi\xi} - 6vv_\xi).$$

可见，(3.7.43)和(3.7.44)给出推广的 KdV 方程(3.7.42)和 KdV 方程 $v_\tau = v_{\xi\xi\xi} + 6vv_\xi$ 之间的一个变换. 这时，

$$\tau_t = g^{3/2}, \qquad T = g.$$

由

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \tau_x & \tau_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{\frac{1}{2}} & 6xfg^{\frac{1}{2}} \\ 0 & g^{3/2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_\xi & x_\tau \\ t_\xi & t_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{-\frac{1}{2}} & -6xfg^{\frac{3}{2}} \\ 0 & g^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix},$$

$$D_\xi = g^{-\frac{1}{2}}D\left(D_\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right), \quad D_\xi^{-1} = g^{\frac{1}{2}}D^{-1},$$

应用定理3.7.7，定理3.7.8和定理3.7.9，就得到方程(3.7.42)的强对称

$$\Phi = \frac{1}{g}(D^2 + 4(u - xf) + 2(u_x - f)D^{-1})$$

和两组对称

$$K_n = \Phi^n K_0, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

$$\tau_n = \Phi^n \tau_0, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

$$K_0 = Tv_\xi = \frac{1}{\sqrt{g}}(u_x - f),$$

$$\tau_0 = T\left(3\tau v_\xi + \frac{1}{2}\right) = 3\left(\int g^{3/2}\mathrm{d}t\right)\frac{1}{\sqrt{g}}(u_x - f) + \frac{g}{2},$$

以及它们满足的李代数关系：

$$[K_m, K_n] = 0, [K_m, \tau_n] = (2m + 1)K_{m+n-1},$$

$$[\tau_m, \tau_n] = 2(m - n)\tau_{m+n-1}$$

$(m, n = 0,1,2,\cdots, K_{-1} = 0 = \tau_{-1})$.

特别,取 $f=-\frac{1}{12t}, g=\frac{1}{t}$,则得到柱 KdV 方程的强对称

$$\Phi = t\left(D^2 + 4\left(u + \frac{x}{12t}\right) + 2\left(u_x + \frac{1}{12t}\right)D^{-1}\right)$$

以及对称

$$K_0 = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(u_x + \frac{1}{12t}\right), \quad \tau_0 = -6u_x.$$

由于柱 KdV 方程中显含 t,u_t 不是它的对称.

此外,我们也可以像在本章 §4 中所做的那样,用待定系数法求方程的形如 $\sigma(x,t,u)=a(x,t)u_t+b(x,t)u_x+c(x,t)u+d(x,t)$ 的对称.

例 3.7.8 设 KdV 方程

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x$$

的对称

$$\sigma = a(x,t)u_t + b(x,t)u_x + c(x,t)u + d(x,t) \tag{3.7.45}$$

这时,

$$\begin{aligned}
\sigma_t &= au_{tt} + a_tu_t + bu_{xt} + b_tu_x + cu_t + c_tu + d \\
&= a(u_{xxxt} + 6uu_{xt} + 6u_xu_t) + a_tu_t \\
&\quad + b(u_{xxxx} + 6uu_{xx} + 6u_x^2) + b_tu_x \\
&\quad + c(u_{xxx} + 6uu_x) + c_tu + d, \\
\sigma_x &= au_{tx} + a_xu_t + bu_{xx} + b_xu_x + cu_x + c_xu + d_x, \\
\sigma_{xxx} &= au_{txxx} + 3a_xu_{txx} + 3a_{xx}u_{tx} + a_{xxx}u_t \\
&\quad + bu_{xxxx} + 3b_xu_{xxx} + 3b_{xx}u_{xx} + b_{xxx}u_x \\
&\quad + cu_{xxx} + 3c_xu_{xx} + 3c_{xx}u_x + c_{xxx}u + d_{xxx}, \\
6u\sigma_x &= 6u(au_{tx} + a_xu_t + bu_{xx} + b_xu_x + cu_x + c_xu + d_x), \\
6u_x\sigma &= 6u_x(au_t + bu_x + cu + d).
\end{aligned}$$

将它们代入对称 σ 应满足的条件

$$\sigma_t - \sigma_{xxx} - 6u\sigma_x - 6u_x\sigma = 0, \tag{3.7.46}$$

注意到上式左端的 u_{txx} 项的系数应为零,即 $a_x=0$,所以

$$a = a(t).$$

将 $u_t = u_{xxx} + 6uu_x$ 代入,则(3.7.45)就化为

$$
\begin{aligned}
& a_t(u_{xxx} + 6uu_x) + b_t u_x + c_t u + d_t \\
& - (3b_x u_{xxx} + 3b_{xx}u_{xx} + b_{xxx}u_x + 3c_x u_{xx} + 3c_{xx}u_x + 3c_{xxx}u \\
& + d_{xxx} + 6b_x uu_x + 6cuu_x + 6c_x u^2 + 6d_x u + 6du_x) = 0.
\end{aligned}
$$

再由上式左端这一多项式的各项系数为零,就得到 a,b,c 和 d 应满足的条件. 首先,由 u_{xxx} 和 uu_x 项的系数应为零,即有

$$a_t - 3b_x = 0, \tag{a}$$

$$a_t - b_x - c = 0, \tag{b}$$

由此二式以及 $a_x = 0$ 又可得

$$b_{xx} = 0, c_x = 0. \tag{c}$$

剩下的 u_x, u 和 1 的系数为零又得到

$$b_t - 6d = 0, \tag{d}$$

$$c_t - 6d_x = 0, \tag{e}$$

$$d_t - d_{xxx} = 0. \tag{f}$$

由(a)和(b),

$$c = \frac{2}{3}a'(t),$$

又由(a),(d)和(e),

$$a''(t) = 3b_{xt} = 18d_x = 3c'(t).$$

因此

$$a''(t) = 0, c'(t) = 0.$$

即有

$$a = 3\alpha_4 t + \alpha_2,$$

$$c = 2\alpha_4,$$

α_4 和 α_2 为任意常数. 进一步由(e)和(f)即得

$$d_x = 0 = d_t,$$

于是

$$d = \frac{\alpha_3}{2},$$

再由(a)和(d),

$$b_x = \alpha_4, b_t = 3\alpha_3,$$

从而解得

$$b = \alpha_4 x + 3\alpha_3 t + \alpha_1.$$

于是得到 KdV 方程的上述形式的对称

$$\sigma = (3\alpha_4 t + \alpha_2)u_t + (\alpha_4 x + 3\alpha_3 t + \alpha_1)u_x + 2\alpha_4 u + \frac{\alpha_3}{2},$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 α_4 为任意常数,将上述表达式改写为

$$\begin{aligned}\sigma &= \alpha_1 u_x + \alpha_2 u_t + \alpha_3\left(3tu_x + \frac{1}{2}\right) + \alpha_4(3tu_t + xu_x + 2u) \\ &= \alpha_1 K_0 + \alpha_2 K_1 + \alpha_3 \tau_0 + \alpha_4 \tau_1.\end{aligned}$$

这就是我们熟知的结论.

这样的用待定系数求对称的办法与§4中的方法颇为类似.但这里显得简单而直接,特别是避免了有关延拓的计算.当然,我们只能得到一些比较简单的对称.不过,在利用对称求方程的解时,也只有那些比较简单的对称才有用.

§8 对称与群不变解

在本章§6中讨论了偏微分方程的群不变解.如果知道了一个偏分方程的一个不变群的不变量完全组,则可以选取这些不变量作为方程的新的变量.这样,在求这个不变群的群不变解时,方程的自变量的个数就要可以减少,甚至化为常微分方程.下面将讨论对称与相应的不变群的群不变解的关系.

设 $\sigma(u)(\equiv\sigma(x,t,u,u_x,u_t,\cdots))$ 是偏微分方程 $F(x,t,u,u_x,u_t,\cdots)=0$ 的一个对称,与之相应的方程的单参数不变群为 g_ε.作为群不变解 $u(x,t)$,一方而它应是方程的解,另一方面它在群的作用不变,即 $\bar{u}(u,\varepsilon)=g_\varepsilon u=u$,或 $\sigma(u)=0$.由此立即可得下列定理.

定理 3.8.1 设 $\sigma(u)$ 是偏微分方程 $F(x,t,u,u_x,u_t,\cdots)=0$ 的一个对称,则 u 是方程的与 σ 相应的不变群的群不变解必须且只须

它满足

$$F(x,t,u,u_x,u_t,\cdots)=0, \tag{3.8.1}$$

$$\sigma(u)=0. \tag{3.8.2}$$

添加了一个方程似乎使问题更加复杂.但是,如果 $\sigma(u)$的形式比较简单,则可以先解出(3.8.2),然后代入(3.8.1)而使之化简.这样的考虑自然比§6 中的办法显得简明而且便于操作.以下将通过几个不同类型的典型例题具体说明.

首先,我们讨论 KdV 方程

$$u_t = u_{xxx}+6uu_x, \tag{3.8.3}$$

已经知道,它有对称 $K_0=u_x$, $K_1=u_t$, $\tau_0=3tu_x+\frac{1}{2}$, $\tau_1=3tu_t+xu_x+2u$ 等.

取 $\sigma=K_0=u_x$,由

$$u_x=0$$

解得 $u=f(t)$(f 为任意函数),将它代入(3.8.3)即得 $f'=0$. 因此,方程(3.8.3)的 x 平移不变解只有 $u=$常数.

取 $\sigma=K_1=u_t$,由

$$u_t=0$$

解得 $u=f(x)$,代入(3.8.3)则得到

$$f'''+6ff'=0.$$

这就是(3.8.3)的 t 平移不变解就是所谓稳定应满足的方程.这是一个常微分方程.

由于对称的线性组合仍是对称,取 $\sigma=cK_0-K_1=cu_x-u_t$(c 为任意常数),由

$$cu_x-u_t=0$$

可解得

$$u=f(\xi),\quad \xi=x+ct,$$

代入(3.8.3)即得

$$f'''+6ff'-cf'=0. \tag{3.8.4}$$

由(3.8.4)给出的解 $u=f(x+ct)$就是 KdV 方程的行波解.(3.8.4)可

积分一次,即有

$$f'' + 3f^2 - cf = k,$$

两边乘以 f' 又可以再积分一次,从而化为一阶常微分方程

$$\frac{1}{2}f'^2 + f^3 - \frac{c}{2}f^2 = kf + l, \tag{3.8.5}$$

其中 k 和 l 为任意常数.特别 $k=0=l$,则(3.8.5)归结为

$$f'^2 + 2f^3 - cf^2 = 0. \tag{3.8.6}$$

当 $c>0$ 时,可得 KdV 方程的孤立子解

$$u = \frac{c}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x + ct) + \delta\right).$$

当 $c<0$ 时有周期解

$$u = \frac{c}{2}\sec^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x + ct) + \delta\right);$$

当 $c=0$ 时则得到多项式解

$$u = -2(x + \delta)^{-2},$$

其中 δ 为任意常数.

取 $\sigma = \tau - aK_1 = 3tu_x + \frac{1}{2} - au_t\,(a \neq 0)$,由

$$3tu_x - au_t + \frac{1}{2} = 0$$

可解得

$$u = f(\xi) + \frac{t}{2a}, \quad \xi = x + \frac{3}{2a}t^2,$$

代入(3.8.3)就得到

$$f''' + 6ff' - \frac{1}{2a} = 0,$$

积分一次

$$f'' + 3f^2 - \frac{1}{2a}\xi - c = 0 \tag{3.8.7}$$

(c 为任意常数).这就是说,如果 $f(\xi)$ 是(3.8.7)的解,则

$$u = f\left(x + \frac{3}{2a}t^2\right) + \frac{t}{2a}$$

是 KdV 方程(3.8.3)的解.

取 $\sigma=\tau_1=3tu_t+xu_x+2u$,由

$$3tu_t + xu_x + 2u = 0$$

可解得

$$u = t^{-\frac{2}{3}}f(\xi), \quad \xi = xt^{-\frac{1}{3}},$$

代入(3.8.3)就得到

$$u_t - u_{xxx} - 6uu_x = t^{-\frac{5}{3}}\left(f''' + 6ff' + \frac{1}{3}\xi f' + \frac{2}{3}f\right),$$

从而得到 $f(\xi)$应满足的方程

$$f''' + 6ff' + \frac{1}{3}\xi f' + \frac{2}{3}f = 0. \tag{3.8.8}$$

也就是说,如果 $f(\xi)$是(3.8.8)的解,则

$$u = t^{-\frac{2}{3}}f(xt^{-\frac{1}{3}})$$

是 KdV 方程(3.8.3)的解.这就是方程的标量变换不变解.显然,这类解经标量变换$(x,t,u)\to(e^{-\epsilon}x,e^{-3\epsilon}t,e^{2\epsilon}u)$不变.

以上几个例中得到的结论与§6 中相应的例子中的结论当然是一致的,但在本节的处理过程中显然比较方便.

由定理 3.8.1 以及上述各例的求解过程可以得到,求与 $\sigma(u)$相应的不变群的不变解时,其实质就是在原方程中加上条件 $\sigma(u)=0$,从而使原方程得到化简.如果任意加上一个条件,一般的这个条件未能与原方程相容,而不能求得解.加上 $\sigma(u)=0$ 这个条件必与原方程相容.不过,如果对称 $\sigma(u)$比较复杂,解 $\sigma(u)=0$ 这个方程比求解原方程还要困难,则就不能起到简化方程的作用.KdV 方程虽然有许多对称,但其中的绝对大多数并不能帮助我们求解.所以,在实际求解中,只有哪些比较简单的对称才是有用的.

在非线性演化方程的研究中,Lax 对是一个非常重要的角色,KdV 方程(3.8.3)有一个 Lax 对

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= (\lambda - u)\varphi, \\ \varphi_t &= -u_x\varphi + (4\lambda + 2u)\varphi_x \end{aligned} \tag{3.8.9}$$

(λ 为任意常数). 上列方程组关于 φ 是线性的,并且,其可积条件即 $\varphi_{xxt}=\varphi_{txx}$成立的条件就是其中的 u 满足 KdV 方程(3.8.3),φ 常称为特征函数,λ 为特征值,u 为势函数.

可以直接验证

$$\sigma = (\varphi^2) = 2\varphi\varphi_x$$

也是 KdV 方程(3.8.3)的一个对称. 因此由$(\varphi^2)_x$ 与 K_n 和 τ_n 的任意线性组合也就是对称.

取 $\sigma=u_x-(\varphi^2)_x$,其相应的不变群的群不变解应满足的方程为

$$u_x-(\varphi^2)_x=0, \tag{3.8.10}$$

$$\varphi_{xx}=(\lambda-u)\varphi, \tag{3.8.11}$$

$$\varphi_t=-u_x\varphi+(4\lambda+2u)\varphi_x. \tag{3.8.12}$$

由(3.8.10)解得

$$u=\varphi^2+\alpha(t),$$

代入(3.8.11)和(3.8.12),则有

$$\varphi_{xx}=(\lambda-\varphi^2-\alpha(t))\varphi,$$

$$\varphi_t=(4\lambda+2\alpha(t))\varphi_x$$

此方程组可积必须 $\alpha'(t)=0$,即 α 为常数,不妨取 $\alpha=0$,这就得到方程组

$$\varphi_{xx}=\lambda\varphi-\varphi^3, \tag{3.8.13}$$

$$\varphi_t=4\lambda\varphi_x. \tag{3.8.14}$$

由(3.8.14)即可解得

$$\varphi=\psi(\xi),\quad \xi=x+4\lambda t$$

(ψ 为任意函数). 再将 $\varphi=\psi(\xi)$代(3.8.13),就得到 ψ 应满足的常微分方程

$$\psi''=\lambda\psi-\psi^3 \tag{3.8.15}$$

显然,所得到的是行波解. 还可以进一步证明,所得到的解包含于对应于 $\sigma=4\lambda K_0-K_1$ 的不变群的群不变解之中. 在(3.8.6)中令 $c=4\lambda$,即

$$f'^2+2f^3-4\lambda f^3=0. \tag{3.8.16}$$

将 $f=\psi^2$ 代入即得

$$2\psi'^2+\psi^4-2\lambda\psi^2=0,$$

再对 ξ 求导一次,则有

$$\psi'(\psi''+\psi^3-\lambda\psi)=0.$$

可见,(3.8.15)的解必使(3.8.16)成立.

取 $\sigma=\tau_0-(\varphi^2)_x=3tu_t+\frac{1}{2}-(\varphi^2)_x$,相应的不变群的不变解应满足方程组

$$3tu_x+\frac{1}{2}-(\varphi^2)_x=0, \tag{3.8.17}$$

$$\varphi_{xx}=(\lambda-u)\varphi, \tag{3.8.18}$$

$$\varphi_t=-u_x\varphi+(4\lambda+2u)\varphi_x, \tag{3.8.19}$$

由(3.8.17)即可解得

$$u=\frac{\varphi^2}{3t}-\frac{x}{6t}+\alpha(t).$$

代入(3.8.18)和(3.8.19)并由相容条件必有 $\alpha'(t)=0$. 不妨取 $\alpha=0$,(3.8.18)和(3.8.19)就化为

$$\varphi_{xx}=\left(\lambda+\frac{x}{6t}\right)\varphi-\frac{1}{3t}\varphi^3, \tag{3.8.20}$$

$$\varphi_t=\frac{1}{6t}+\left(4\lambda-\frac{x}{3t}\right)\varphi_x. \tag{3.8.21}$$

由(3.8.21)解得

$$\varphi=t^{1/6}\psi(\xi),\quad \xi=-18^{2/3}\left(\lambda+\frac{x}{6t}\right),$$

代入(3.8.20)即得

$$9\psi''+\frac{1}{18}\xi\psi-\frac{1}{3}\psi^3=0.$$

由此即可得相应的不变群的群不变解.

$$u=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}\psi^2(\xi)-\frac{x}{6t},\xi=-18t^{2/3}\left(\lambda+\frac{x}{6t}\right).$$

下面讨论 2+1 维的 KP 方程

$$u_t+u_{xxx}+6uu_x-D^{-1}u_{yy}=0 \tag{3.8.22}$$

或

$$(u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x - u_{yy} = 0, \tag{3.8.23}$$

在例 3.7.5 中已经列出此方程的一些对称,以下考察利用这些对称对 KP 方程的约化.

取 $\sigma = u_y$,则由

$$u_y = 0$$

得到 $u = f(x, t)$,并将它代入(3.8.22)则得到 KdV 方程

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0.$$

取 $\sigma = u_x - u_y$,由

$$u_x - u_y = 0$$

得到

$$u = f(\xi, \eta), \quad \xi = x + t, \quad \eta = y,$$

代入(3.8.23),则得到 Boussinesq 方程

$$f_{\xi\xi} - f_{\eta\eta} + (f_{\xi\xi\xi} + 6ff_\xi)_\xi = 0. \tag{3.8.24}$$

这就是说,如果 $f(\xi, \eta)$是(3.8.24)的解,则 $u = f(x + t, y)$是 KP 方程(3.8.24)的解.

取 $\sigma = \tau_0 - aK_1 = 3tu_x - \dfrac{1}{2} - au_y$, a 为任意的非零常数. 由

$$3tu_x - \frac{1}{2} - au_y = 0$$

可解得

$$u = f(\xi, \tau) - \frac{y}{2a}, \quad \xi = x + \frac{3ty}{a} + \frac{3t^3}{a^2}, \quad \tau = t,$$

并可将 KP 方程(3.8.22)约化为 KdV 方程

$$f_\tau + f_{\xi\xi\xi} + 6ff_\xi = 0, \tag{3.8.25}$$

这就说明,如果 $f(\xi, \tau)$是上方程的解,则

$$u = f\left(x + \frac{3ty}{a} + \frac{3t^3}{a^2}, t\right) - \frac{y}{2a}$$

是 KP 方程(3.8.22)的解.

例如,由(3.8.25)的解 $f = -2(\xi - c)^{-2}$,则可得到 KP 方程的解

$$u = -2\left(x + \frac{3t}{a}y + \frac{3t^3}{a^2} - c\right)^{-2} - \frac{y}{2a}.$$

取 $\sigma=\tau_1=2tu_y+yu_x$，由

$$2tu_y + yu_x = 0 \tag{3.8.26}$$

可解得

$$u = f(\xi,\tau), \quad \xi = tx - \frac{1}{4}y^2, \quad \tau = t.$$

从而可将方程(3.8.23)约化为

$$\tau(f_\tau + \tau^3 f_{\xi\xi\xi} + 6\tau f f_\xi)_\xi + (\xi f)_\xi = 0.$$

其实，我们还可以取(3.8.26)的解

$$u = \frac{1}{t}f(\xi,\tau) + \frac{x}{12t} - \frac{y^2}{48t^2},$$

$$\xi = t^{-\frac{3}{2}}\left(xt - \frac{1}{4}y^2\right), \quad \tau = -2t^{-\frac{1}{2}}.$$

并进一步得到

$$(u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x - u_{yy} = t^{-3}(f_\tau + f_{\xi\xi\xi} + 6ff_\xi)_\xi,$$

这就又将 KP 方程约化为 KdV 方程

$$f_\tau + f_{\xi\xi\xi} + 6ff_\xi = 0.$$

取 $\sigma=\tau_0+a\tau_1=3tu_x-\frac{1}{2}+2atu_y+ayu_x$，$a$ 为非零常数. 由

$$(3t + ay)u_x + 2atu_y - \frac{1}{2} = 0 \tag{3.8.27}$$

可解得

$$u = f(\xi,\tau) + \frac{y}{4at},$$

$$\xi = \frac{1}{4t}y^2 + \frac{3}{2a}y - x - \frac{9t}{4a^2}, \quad \tau = t.$$

并从而得到

$$(u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x - u_{yy} = -\left(f_\tau - f_{\xi\xi\xi} - 6ff_\xi + \frac{1}{2t}f\right)_\xi,$$

这就将 KP 方程约化为柱 KdV 方程

$$f_\tau = f_{\xi\xi\xi} + 6ff_\xi - \frac{f}{2\tau}.$$

取 $\sigma=3tu_t+2yu_y+xu_x+2u$，由

$$3tu_t + 2yu_y + xu_x + 2u = 0 \tag{3.8.28}$$

的特征方程

$$\frac{dt}{3t} = \frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{du}{-2u},$$

不难得到它的首次积分

$$xt^{-\frac{1}{3}}, \quad yt^{-\frac{2}{3}}, \quad ut^{\frac{2}{3}},$$

从而得到(3.8.28)的解

$$u = t^{-2/3}f(\xi,\eta), \quad \xi = xt^{-\frac{1}{3}}, \quad \eta = yt^{-\frac{2}{3}}.$$

并可将 KP 方程约化为方程

$$f_{\xi\xi\xi} + 6ff_\xi - \frac{1}{3}\xi f_\xi - \frac{2}{3}\eta f_\eta - D_\xi^{-1}f_{\eta\eta} = 0. \tag{3.8.29}$$

由此方程的解 $f(\xi,\eta)$就可以得到 KP 方程的标量变换不变解

$$u = t^{-\frac{2}{3}}f(xt^{-\frac{1}{3}}, yt^{-\frac{2}{3}}).$$

最后，我们将研究一个微分几何中的非线性问题. 这就是三维欧氏空间 E^3 中的常中曲率曲面的方程. 典型的常中曲率曲面就是球面和圆柱面. 此外还有哪些常中曲率曲面？问题可以归结为求解一个非线性偏分方程组.

设 S 是 E^3 中的浸入曲面，并有局部坐标表示

$$\underline{r}: D \to E^3,$$
$$(x,t) \to (X^1,X^2,X^3),$$

由推广的 Weierstrass-Enneper 公式，

$$\begin{cases} X^1 + iX^2 = 2i\int_{z_0}^{z}(\bar{\psi}_1^2 dz' - \bar{\psi}_2^2 d\bar{z}'), \\ X^1 - iX^2 = 2i\int_{z_0}^{z}(\psi_2^2 dz' - \psi_1^2 d\bar{z}'), \\ X^3 = -2\int_{z_0}^{z}(\psi_2\bar{\psi}_1 dz' + \psi_1\bar{\psi}_2 d\bar{z}'), \end{cases} \tag{3.8.30}$$

其中 ψ_1, ψ_2 满足微分方程组

$$\psi_{1t} - i\psi_{1x} = 2H(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)\psi_2, \tag{3.8.31}$$

$$\psi_{2t} + \mathrm{i}\psi_{2x} = -2H(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)\psi_1, \quad (3.8.32)$$

以及 H = 常数，$z = t + \mathrm{i}x$，$\bar{z} = t - \mathrm{i}x$. 则由(3.8.30)所决定的曲面 $\underline{r}(X^1, X^2, X^3)$ 必为常中曲率 H 的曲面. 这时，曲面的第一基本形式

$$I = 4(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z},$$

Gauss 曲率

$$K = -\frac{(\ln|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)_{z\bar{z}}}{(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)}$$

$$= -\frac{\Delta(\ln|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)}{4(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

于是，问题归结为求解方程组(3.8.31)和(3.8.32). 为简单计并不一般性，不妨设 $H = \frac{1}{2}$. 这时，方程(3.8.31)和(3.8.32)变为

$$\psi_{1t} = \mathrm{i}\psi_{1x} + (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)\psi_2 \equiv K_1, \quad (3.8.33)$$

$$\psi_{2t} = -\mathrm{i}\psi_{2x} - (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)\psi_1 \equiv K_2. \quad (3.8.34)$$

由于方程组中不显含 x 和 t，它必有行波解. 设

$$\psi_1 = \psi_1(\xi), \quad \psi_2 = \psi_2(\xi), \quad \xi = at + bx,$$

a 和 b 为任意常数. 于是，(3.8.33)和(3.8.34)就归结为

$$(a - b\mathrm{i})\psi_1' = (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)\psi_2, \quad (3.8.35)$$

$$(a + b\mathrm{i})\psi_2' = -(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)\psi_1. \quad (3.8.36)$$

并由此推得

$$\frac{a - b\mathrm{i}}{a + b\mathrm{i}}(\psi_1^2)' + (\psi_2^2)' = 0,$$

从而得到

$$\frac{a - b\mathrm{i}}{a + b\mathrm{i}}\psi_1^2 + \psi_2^2 = c,$$

c 为任意常数. 设 $\alpha = \frac{a + b\mathrm{i}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$，则上式化为

$$\bar{\alpha}^2\psi_1^2 + \psi_2^2 = c.$$

若 $c = 0$，则有 $\psi_2 = \mathrm{i}\bar{\alpha}\psi_1$（或 $-\mathrm{i}\bar{\alpha}\psi_1$），$|\psi_2| = |\psi_1|$，方程组(3.8.35)

和(3.8.36)化为

$$(a-b\mathrm{i})\psi_1{}'=2\mathrm{i}\bar{\alpha}\,|\psi_1|^2\psi_1,$$

$$(a+b\mathrm{i})\bar{\psi}_1{}'=-2\mathrm{i}\alpha\,|\psi_1|^2\bar{\psi}_1.$$

且推得

$$\psi_1{}'\bar{\psi}_1+\bar{\psi}_1{}'\psi_1=0,$$

因此

$$|\psi_1|^2=|\psi_2|^2=k^2(k>0),$$

$$\psi_1{}'=\frac{2\mathrm{i}k^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\psi_1.$$

这就得到方程的解

$$\psi_1=k\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta},\quad \psi_2=\frac{\mathrm{i}k(a-b\mathrm{i})}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta},\quad \theta=\frac{k^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\xi.$$

若 $c\neq0$,不妨设 $c=1$,以及

$$\psi_1=\alpha\cosh\theta,\quad \psi_2=\mathrm{i}\sinh\theta.$$

这时

$$|\psi_1|^2+|\psi_2|^2=\cosh\theta\cosh\bar{\theta}+\sinh\theta\sinh\bar{\theta}=\cosh(\theta+\bar{\theta}).$$

于是,方程组(3.8.35)和(3.8.36)就化为

$$\theta'=\mathrm{i}\cosh(\theta+\bar{\theta}).$$

设 $\theta=\theta_1+\mathrm{i}\theta_2$,$\theta_1$ 和 θ_2 为实数,则上式表示为

$$\theta_1{}'+\mathrm{i}\theta_2{}'=\mathrm{i}\cosh2\theta_1.$$

这就得到

$$\theta_1=k,\quad \theta_2=\xi\cosh2k+l,$$

k,l 为任意常数,从而得到方程组的解

$$\psi_1=\frac{a+b\mathrm{i}}{\sqrt{a^2+b^2}}\cosh\theta,\psi_2=\mathrm{i}\sinh\theta,\theta=k+\mathrm{i}(\xi\cosh2k+l).$$

由于 $|\psi_1|^2+|\psi_2|^2$ 为常数,相应曲面的 Gauss 曲率 $K=0$. 曲面为圆柱面.

为了进一步求得方程组(3.8.33)和(3.8.34)的其它解,先求方程组的对称. K_1 和 K_2 对 ψ_1 和 ψ_2 的线性化算子分别为

$$K'_{1\psi_1} = iD_x + \bar{\psi}_1\psi_2 + \psi_1\psi_2\bar{h},$$

$$K'_{1\psi_2} = |\psi_1|^2 + 2|\psi_2|^2 + \psi_1{}^2\bar{h},$$

$$K'_{2\psi_1} = -|\psi_2|^2 - 2|\psi_1|^2 - \psi_1{}^2\bar{h},$$

$$K'_{2\psi_2} = -iD_x - \psi_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2\bar{h},$$

其中算子 $\bar{h}$ 定义为：$\bar{h}f = \bar{f}$. 设 $\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}$ 是方程组(3.8.33)和(3.8.34)的对称，则 $\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}$ 应满足的条件为

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix}K'_{1\psi_1} & K'_{1\psi_2}\\ K'_{2\psi_1} & K'_{2\psi_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix},$$

即

$$\sigma_{1t} = K'_{1\psi_1}\sigma_1 + K'_{1\psi_2}\sigma_2, \tag{3.8.37}$$

$$\sigma_{2t} = K'_{2\psi_1}\sigma_1 + K'_{2\psi_2}\sigma_2. \tag{3.8.38}$$

以下我们将采用上一节中所提到的待定系数法求方程组的一些具有简单形式的对称. 设

$$\sigma_1 = a_1\psi_{1x} + a_2\psi_{2x} + b_1\psi_{1t} + b_2\psi_{2t} + c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + m,$$

$$\sigma_2 = e_1\psi_{1x} + e_2\psi_{2x} + f_1\psi_{1t} + f_2\psi_{2t} + g_1\psi_1 + g_2\psi_2 + n,$$

其中 $a_i, b_i, c_i, f_i, g_i (i=1,2)$ 以及 m 和 n 都是 x 和 t 的复值的待定函数. 于是

$$\begin{aligned}\sigma_{1t} = {}& a_{1t}\psi_{1x} + a_1\psi_{1xt} + a_{2t}\psi_{2x} + a_2\psi_{2xt} + b_{1t}\psi_{1t} + b_1\psi_{1tt}\\ &+ b_{2t}\psi_{2t} + b_2\psi_{2tt} + c_{1t}\psi_1 + c_1\psi_{1t} + c_{2t}\psi_2 + c_2\psi_{2t} + m_t,\end{aligned} \tag{3.8.39}$$

$$\begin{aligned}K_{1\psi_1}(\sigma_1) = {}& ia_{1x}\psi_{1x} + ia_1\psi_{1xx} + ia_{2x}\psi_{2x} + ia_2\psi_{2xx} + ib_{1x}\psi_{1t}\\ &+ ib_1\psi_{1xt} + ib_{2x}\psi_{2t} + ib_2\psi_{2xt} + ic_{1x}\psi_1 + ic_1\psi_{1x}\\ &+ ic_{2x}\psi_2 + ic_2\psi_{2x} + im_x + a_1\bar{\psi}_1\psi_2\psi_{1x} + a_2\bar{\psi}_1\psi_2\psi_{2x}\\ &+ b_1\bar{\psi}_1\psi_2\psi_{1t} + b_2\bar{\psi}_1\psi_2\psi_{2t} + c_1\bar{\psi}_1\psi_2\psi_1 + c_2\bar{\psi}_1\psi_2\psi_2\\ &+ m\bar{\psi}_1\psi_2 + \bar{a}_1\psi_1\psi_2\bar{\psi}_{1x} + \bar{a}_2\psi_1\psi_2\bar{\psi}_{2x} + \bar{b}_1\psi_1\psi_2\bar{\psi}_{1t}\end{aligned}$$

$$+\bar{b}_2\psi_1\psi_2\bar{\psi}_{2t}+\bar{c}_1\psi_1\psi_2\bar{\psi}_1+\bar{c}_2\psi_1\psi_2\bar{\psi}_2+\bar{m}\psi_1\psi_2,$$

(3.8.40)

$$\begin{aligned}K'_{1\psi_2}(\sigma_2)=&e_1|\psi_1|^2\psi_{1x}+e_2|\psi_1|^2\psi_{2x}+f_1|\psi_1|^2\psi_{1t}\\&+f_2|\psi_1|^2\psi_{2t}+g_1|\psi_1|^2\psi_1+g_2|\psi_1|^2\psi_2\\&+n|\psi_1|^2+2e_1|\psi_1|^2\psi_{1x}+2e_2|\psi_1|^2\psi_{2x}\\&+2f_1|\psi_1|^2\psi_{1t}+2f_2|\psi_1|^2\psi_{2t}\\&+2g_1|\psi_1|^2\psi_1+2g_2|\psi_1|^2\psi_2\\&+2n|\psi_1|^2+\bar{e}_1\psi_2^2\bar{\psi}_{2t}+\bar{e}_2\psi_2^2\bar{\psi}_{2x}\\&+\bar{f}_1\psi_2^2\bar{\psi}_{1t}+\bar{f}_2\psi_2^2\bar{\psi}_{2t}+\bar{g}_1\psi_2^2\bar{\psi}_1\\&+\bar{g}_2\psi_2^2\bar{\psi}_2+\bar{n}\psi_2^2.\end{aligned}\tag{3.8.41}$$

又由(3.8.33)和(3.8.34),

$$\begin{aligned}\psi_{1xt}=&\mathrm{i}\psi_{1xx}+\bar{\psi}_1\psi_2\psi_{1x}+\psi_1\psi_2\bar{\psi}_{1x}+|\psi_1|^2\psi_{2x}\\&+2|\psi_2|^2\psi_{2x}+\psi_2^2\bar{\psi}_{2x},\\\psi_{2xt}=&-\mathrm{i}\psi_{2xx}-2|\psi_1|^2\psi_{1x}-\psi_1^2\bar{\psi}_{1x}-\psi_1\bar{\psi}_2\psi_{2x}\\&-\psi_1\psi_2\bar{\psi}_{2x}-|\psi_2|^2\psi_{1x},\\\psi_{1tt}=&-\psi_{1xx}+2\mathrm{i}\bar{\psi}_1\psi_2\psi_{1x}+2\mathrm{i}\psi_2^2\bar{\psi}_{2x}\\&-\psi_1(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)^2,\\\psi_{2tt}=&-\psi_{2xx}+2\mathrm{i}\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\psi_{2x}+2\mathrm{i}\psi_1^2\bar{\psi}_{1x}\\&-\psi_2(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)^2.\end{aligned}\tag{3.8.42}$$

将(3.8.33),(3.8.34)和(3.8.42)代入(3.8.39)~(3.8.41),则有

$$\begin{aligned}\sigma_{1t}=&a_{1t}\psi_{1x}+a_{2t}\psi_{2x}+c_{1t}\psi_1+c_{2t}\psi_2+m_t+\mathrm{i}b_{1t}\psi_{1x}\\&+b_{1t}(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)\psi_2-\mathrm{i}b_{2t}\psi_{2x}\\&-b_{2t}(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)\psi_1+\mathrm{i}c_1\psi_{1x}\\&+b_1(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)\psi_2-\mathrm{i}c_2\psi_{2x}\\&-c_2(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)\psi_1+\mathrm{i}a_1\psi_{1xx}+a_1\psi_{1x}\bar{\psi}_1\psi_2\\&+a_1\psi_1\bar{\psi}_{1x}\psi_2+a_1\psi_{2x}\bar{\psi}_1\psi_1+2a_1\psi_{2x}\bar{\psi}_2\psi_2\end{aligned}$$

$$+a_1\psi_2^2\bar{\psi}_{2x}-ia_2\psi_{2xx}-2a_2\psi_{1x}\bar{\psi}_1\psi_1$$
$$-a_2\psi_1^2\bar{\psi}_{1x}-a_2\psi_{2x}\bar{\psi}_2\psi_1-a_2\bar{\psi}_{2x}\psi_1\psi_2-a_2\psi_2\bar{\psi}_2\psi_{1x}$$
$$-b_1\psi_{1xx}+2ib_1\psi_{1x}\bar{\psi}_1\psi_2+2ib_1\psi_2^2\bar{\psi}_{2x}$$
$$-b_1\psi_1(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)^2-b_2\psi_{2xx}+2ib_2\psi_{2x}\bar{\psi}_2\psi$$
$$+2ib_2\psi_1^2\bar{\psi}_{1x}-b_2\psi_2(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)^2 \tag{3.8.43}$$

以及

$$K'_{1\psi_1}(\sigma_1)=ia_{1x}\psi_{1x}+ia_1\psi_{1xx}+ia_{2x}\psi_{2x}+ia_2\psi_{2xx}+ic_{1x}\psi_1$$
$$+ic_1\psi_{1x}+ic_{2x}\psi_2+ic_2\psi_{2x}+im_x+a_1\psi_{1x}\bar{\psi}\cdot\psi_2$$
$$+a_2\psi_{2x}\bar{\psi}_1\psi_2+c_1\psi_1\bar{\psi}_1\psi_2+c_2\bar{\psi}_1\psi_2^2+m\bar{\psi}_1\psi_2$$
$$+\bar{a}_1\bar{\psi}_{1x}\psi_1\psi_2+\bar{a}_2\bar{\psi}_{2x}\psi_1\psi_2+\bar{c}_1\psi_1\bar{\psi}_1\psi_2+\bar{c}_2\psi_1\psi_2\bar{\psi}_2$$
$$+\bar{m}\bar{\psi}_1\psi_2-b_{1x}\psi_{1x}+ib_{1x}(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)^2\psi_2$$
$$+b_{2x}\psi_{2x}-ib_{2x}(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)^2\psi_1-b_1\psi_{1xx}$$
$$+ib_1\psi_{1x}\bar{\psi}_1\psi_2+ib_1\psi_1\bar{\psi}_{1x}\psi_2+b_2\psi_{2xx}$$
$$-2ib_2\psi_{1x}\bar{\psi}_1\psi_1+ib_1\psi_1\bar{\psi}_1\psi_{2x}$$
$$+2ib_1\psi_2\psi_{2x}\bar{\psi}_2+ib_1\psi_2^2\bar{\psi}_{2x}-ib_2\psi_1^2\bar{\psi}_{1x}$$
$$-ib_2\psi_1\bar{\psi}_2\psi_{2x}-ib_2\psi_1\psi_2\bar{\psi}_{2x}-ib_2\psi_{1x}\psi_2\bar{\psi}_2$$
$$+ib_1\psi_{1x}\bar{\psi}_1\psi_2+b_1(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)\bar{\psi}_1\psi_2^2$$
$$-ib_2\bar{\psi}_1\psi_2\psi_{2x}-b_2(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)|\psi_1|^2\psi_2$$
$$-i\bar{b}_1\psi_{1x}\psi_1\psi_2+\bar{b}_1(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)\psi_1|\psi_1|^2$$
$$+i\bar{b}_2\psi_1\psi_2\bar{\psi}_{2x}-\bar{b}_2(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)|\psi_1|^2\psi_2, \tag{3.8.44}$$

$$K'_{1\psi_1}(\sigma_2)=e_1|\psi_1|^2\psi_{1x}+e_2|\psi_1|^2\psi_{2x}+g_1|\psi_1|^2\psi_1$$
$$+g_2|\psi_1|^2\psi_2+n|\psi_1|+2e_1|\psi_1|^2\psi_{1x}$$
$$+2e_2|\psi_1|^2\psi_{2x}+2g_1|\psi_1|^2\psi_1+2g_2|\psi_1|^2\psi_2$$
$$+2n|\psi_1|^2+\bar{e}_1\psi_2^2\bar{\psi}_{1x}+\bar{e}_2\psi_2^2\bar{\psi}_{2x}$$
$$+\bar{g}_1\psi_2^2\bar{\psi}_1+\bar{g}_2|\psi_2|^2\psi_2-if_2|\psi_1|^2\psi_{2x}$$

$$
\begin{aligned}
&-f_2(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)|\psi_1|^2\psi_1+\bar{n}\psi_2^2+\mathrm{i}f_1|\psi_1|^2\psi_{1x}\\
&+f_1(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)|\psi_1|^2\psi_2+2\mathrm{i}f_1|\psi_1|^2\psi_{1x}\\
&+2f_1(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)|\psi_2|^2\psi_2-2\mathrm{i}f_2|\psi_2|^2\psi_{2x}\\
&-2f_2(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)|\psi_2|^2\psi_1-\mathrm{i}\bar{f}_1\psi_2^2\bar{\psi}_{1x}\\
&+\bar{f}_1(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)|\psi_2|^2\psi_2+\mathrm{i}\bar{f}_2\psi_2^2\bar{\psi}_{2x}\\
&-\bar{f}_2(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)\psi_2^2\psi_1. \qquad (3.8.45)
\end{aligned}
$$

由(3.8.37)，即 $\sigma_{1t}=K'_{1\psi_1}(\sigma_1)+K'_{1\psi_2}(\sigma_2)$，比较各项的系数，就得到下面的条件：

$$
\begin{aligned}
&a_2=b_2=c_2=e_1=f_1=g_1=m=n=0,\\
&a_1=\bar{a}_1=e_2,\quad b_1=\bar{b}_1=f_2,\\
&a_{1t}=-b_{1x},\quad a_{1x}=b_{1t},\\
&c_{1t}=\mathrm{i}c_{1x},\quad c_1+\bar{c}_1=g_2+\bar{g}_2,\\
&b_{1t}-\mathrm{i}b_{1x}=\bar{c}_1+g_2.
\end{aligned}
$$

同样地，由(3.8.38)，即 $\sigma_{2t}=K'_{2\psi_1}(\sigma_1)+K'_{2\psi_2}(\sigma_2)$，可得到除上述条件外，还有另一个条件：

$$g_{1t}=-\mathrm{i}g_{2x}.$$

总之，我们可以得到下列结论：

$$
\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(x,t)\psi_{1x}+b(x,t)\psi_{1t}+c(x,t)\psi_1\\ a(x,t)\psi_{2x}+b(x,t)\psi_{2t}+d(x,t)\psi_2\end{pmatrix} \qquad (3.8.46)
$$

是方程组(3.8.33)和(3.8.34)的对称，其中 $a(x,t)$ 和 $b(x,t)$ 是实值函数，$c(x,t)$ 和 $d(x,t)$ 是复值函数，且满足如下条件：

$$
\begin{aligned}
&a_t=-b_x,\quad a_x=b_t,\quad b_t-\mathrm{i}b_x=\bar{c}+d,\\
&c_t=\mathrm{i}c_x,\quad d_t=-\mathrm{i}d_x,\quad c+\bar{c}=d+\bar{d}. \qquad (3.8.47)
\end{aligned}
$$

例如

$$
\begin{pmatrix}\psi_{1x}\\ \psi_{2x}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\psi_{1t}\\ \psi_{2t}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\mathrm{i}\psi_1\\ \mathrm{i}\psi_2\end{pmatrix}
$$

以及

$$\begin{pmatrix} t\psi_{1x} - x\psi_{1t} - \frac{\mathrm{i}}{2}\psi_1 \\ t\psi_{2x} - x\psi_{2t} + \frac{\mathrm{i}}{2}\psi_2 \end{pmatrix}$$

都是方程的对称.

并且还可以证明,方程组(3.8.33)和(3.8.34)的全体形如(3.8.46)满足条件(3.8.47)的对称构成一个无穷维的李代数.

进一步将利用上述已得到的一些对称求相应的群不变解.取

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\psi_{1x} - x\psi_{1t} - \frac{\mathrm{i}}{2}\psi_1 \\ t\psi_{2x} - x\psi_{2t} + \frac{\mathrm{i}}{2}\psi_2 \end{pmatrix},$$

由

$$t\psi_{1x} - x\psi_{1t} - \frac{\mathrm{i}}{2}\psi_1 = 0, t\psi_{2x} - x\psi_{2t} + \frac{\mathrm{i}}{2}\psi_2 = 0,$$

解得

$$\psi_1 = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\theta}\phi_1(\xi), \quad \psi_2 = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\theta}\phi_2(\xi),$$

$$\xi = x^2 + t^2, \quad \theta = \arctan\frac{x}{t},$$

其中ϕ_1和ϕ_2是任意函数.于是,(3.8.33)和(3.8.34)化为

$$\frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}}\phi_1 + 2\xi^{1/2}\phi_1' = (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)\phi_2,$$

$$\frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}}\phi_2 + 2\xi^{1/2}\phi_2 = -(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)\phi_1.$$

由之可得

$$\xi^{-1/2}(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2) + \xi^{1/2}(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)' = 0$$

从而可得到第一积分

$$\xi^{1/2}(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2) = c.$$

由于$|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2$,因此

$$\Delta\ln(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2) = 0,$$

所以,所对应的曲面仍为圆柱面.

取

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_{1x}-\mathrm{i}\lambda\psi_1\\ \psi_{2x}-\mathrm{i}\lambda\psi_2\end{pmatrix},$$

λ 为任意非零实数.由

$$\psi_{1x}-\mathrm{i}\lambda\psi_1=0,\quad \psi_{2x}-\mathrm{i}\lambda\psi_2=0,$$

即可解得

$$\psi_1=r(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x},\quad \psi_2=s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x},\tag{3.8.48}$$

r,s 是 t 的任意函数,在 B. Konopelchenko 和 I. Taimanov 的文章(Phys J A:Math. Gen. 19(1996),1261～1265)中曾利用这一约化证明约化后的系统是完全可积的.不过,他们没有指出这一约化的来源.现在可以看到,这一约化来自于方程的一个对称,并且,我们可以得到许多类似的约化.

将(3.8.48)代入(3.8.33)和(3.8.34),则有

$$r_t+\lambda r=(|r|^2+|s|^2)s,$$
$$s_t-\lambda s=-(|r|^2+|s|^2)r,$$

并不难得到方程组的两个首次积分:

$$I_1=r\bar{s}-\bar{r}s,$$
$$I_2=\frac{1}{2}(|r|^2+|s|^2)^2-\frac{\lambda}{2}(r\bar{s}+\bar{r}s).$$

进一步还可以证明它们的对合性,也就是系统是完全可积的.

取

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\psi_{1x}-x\psi_{1t}\\ t\psi_{2x}-x\psi_{2t}+\mathrm{i}\psi_2\end{pmatrix},$$

由

$$t\psi_{1x}-x\psi_{1t}=0,\quad t\psi_{2x}-x\psi_{2t}+\mathrm{i}\psi_2=0$$

即可解得

$$\begin{aligned}&\psi_1=\phi_1(\xi),\quad \psi_2=\phi_2(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta},\\ &\xi=x^2+t^2,\quad \theta=\arctan\frac{x}{t},\end{aligned}\tag{3.8.49}$$

ϕ_1 和 ϕ_2 是 ξ 的任意的复值函数.

将(3.8.49)代入(3.8.33)和(3.8.34),则得到常微分方程组

$$2\xi^{1/2}\phi_1' = (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)\phi_2, \tag{3.8.50}$$

$$2\xi^{1/2}\phi_2' + 2\xi^{-1/2}\phi_2 = -(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)\phi_1. \tag{3.8.51}$$

也不难得到方程组的两个首次积分.

$$I_1 = \xi^{1/2}(\phi_1\overline{\phi}_2 - \phi_2\overline{\phi}_1),$$

$$I_2 = \xi^{1/2}(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)^2 + 2\xi^{1/2}(\phi_1\overline{\phi}_2 + \phi_2\overline{\phi}_1),$$

设 $\phi_1 = p_1 + \mathrm{i}p_2, \phi_2 = q_1 + \mathrm{i}q_2, p_1, p_2, q_1$ 和 q_2 是 ξ 的实值函数,则方程组(3.8.50)和(3.8.51)可表示为

$$2\xi^{\frac{1}{2}}p_j' = (p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2)q_j', \quad j = 1,2,$$

$$2(\xi^{\frac{1}{2}}p_j)' = -(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2)q_j', \quad j = 1,2.$$

特别,设 $p_2 = q_2 = 0, p_1 = p(\xi), q_1 = q(\xi)$,方程组又简化为

$$2\xi^{1/2}p' = (p^2 + q^2)q, \tag{3.8.52}$$

$$2(\xi^{1/2}q)' = -(p^2 + q^2)p. \tag{3.8.53}$$

并有首次积分

$$I = \xi(p^2 + q^2)^2 + 2\xi^{1/2}pq.$$

令

$$p = r\cos\tau, \quad q = r\sin\tau,$$

则(3.8.52)和(3.8.53)变为

$$2\xi^{1/2}r' + 2\xi^{-1/2}r\sin^2\tau = 0,$$

$$2\xi^{1/2}r\tau' + \frac{1}{2}\xi^{-1/2}\cos\tau\sin\tau = -r^3$$

或

$$r' = -\frac{1}{4}\xi^{-1}r + \frac{1}{4}\xi^{-1}r\cos2\tau, \tag{3.8.54}$$

$$\tau' = -\frac{1}{2}\xi^{-1/2}r^2 - \frac{1}{4}\xi^{-1}\sin2\tau, \tag{3.8.55}$$

以及

$$I = \xi r^4 + \xi^{1/2}r^2\sin2\tau. \tag{3.8.56}$$

并由之解得

$$r^2 = -\frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}}\sin 2\tau \pm \frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\sin^2 2\tau + 4I}.$$

于是有

$$\tau' = -\frac{1}{4}\xi^{-1}\sqrt{\sin^2 2\tau + 4I},$$

$$\ln r = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin^2\tau}{\xi}d\xi.$$

这时,曲面的 Gauss 曲率

$$K = -\frac{1}{4}\frac{\Delta(\ln r^2)}{r^4}$$

$$= \frac{-\sin 2\tau\sqrt{\sin^2 2\tau + 4I}}{(-\sin 2\tau + \sqrt{\sin^2 2\tau + 4I})^2}.$$

由 $\sin^2 2\tau + 4I \geqslant 0$,必有 $I \geqslant -\frac{1}{4}$,当 $I = -\frac{1}{4}$ 时,则有 $K = 0$,曲面为圆柱面. 当 $I = 0$ 时,即有 $\xi r^4 + \xi^{1/2}r^2\sin 2\tau = 0$,可知 $\sin 2\tau \leqslant 0$,并可得到 $K = \frac{1}{4}$,曲面为球面. 总之,当 I 由 $-\frac{1}{4}$ 变到 0 时,我们得到由圆柱面变到球面的一族曲面. 事实上,这就是 Delaunay 曲面.

当然,方程组还有许许多多的对称,利用这些对称能不能得到更有意思的结果,尚待进一步研究.

习　题

1. 设 $X = \{(x, y)\}$, $U = \{(u)\}$, M 是 $X \times U$ 的开集,即 $M = \{(x, y, u)\}$,求 $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ 和 $(M^{(1)})^{(1)}$.

2. 设 $P = xyu_x u_{xy}$,求

$$D_x P, \quad D_x P, \quad D_x D_y P.$$

3. 求与 R^3 上的向量场 $\underset{\sim}{v} = x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y} - 2z\frac{\partial}{\partial z}$ 相应的单参数变换群.

4. 设 $M(\varepsilon)$ 是 n 阶可逆矩阵,证明:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}(M(\varepsilon)^{-1}) = -M(\varepsilon)^{-1}\frac{\mathrm{d}M(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}M(\varepsilon)^{-1}$$

5. 求例 3.3.12 中 $pr^{(2)}\underline{v}$中的系数ϕ^{xx}，ϕ^{tt}.

6. 证明：向量场的延拓向量场的李代数性质.

7. 验证：例 3.4.1 中 $v_1, \cdots, v_6$ 生成一个李代数.

8. 证明：

$$D_x\frac{\partial}{\partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j}D_x - \frac{\partial}{\partial u_{j-1}}, j = 1, \cdots, n$$

$$D_x\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}D_x.$$

9. 给定 Riccati 方程 $z_y = (y+1)z^2 - z$，证明，它有一个以 $\underline{v} = (z + yz^2)\frac{\partial}{\partial z}$为生成元的单参数变换群，求方程的积分因子并将方程积分.

10. 证明：在 $M = \{u(x,t)\}$上的任意向量场 $\sigma(u)$必有与之相应的单参数变换群.

11. 求方程

$$u_t = u_{xx} + xu_x + u$$

的对称.

12.

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2e^x\cos t\psi_{1x} + 2e^x\sin t\psi_{1t} + e^{x+it}\psi_1\\ 2e^x\cos t\psi_{2x} + 2e^x\sin t\psi_{2t} + e^{x-it}\psi_2\end{pmatrix}$$

是方程(3.8.33)和(3.8.34)的一个对称.求

(1) 与之相应的单参数不变群.

(2) 方程的与之相应的群不变解.

参 考 文 献

[1] Chern S S. Differential Manifolds. Univ. of Chicago, Lecture Notes:1953

[2] Chevalley C. Theory of Lie groups. Princeton Univ. Press: Princeton. 1946

[3] Olver P J. Applications of Lie groups to Differential Equations. Springer-Verlag:1986

[4] George W. Bluman and Sukeyuki Kumei. Symmetries and Differential Equations. Spinger-Verlag, World Publishing Corp,1989

[5] Ibragimov N H. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics. D. Reidel Publishing Company,1984

[6] Gu Chaohao(Ed.). Soliton theory and its applications. Springer-Verlag, Zhejiang Science and Technology Publishing House,1995